

16 Examentraining

16.1 Algemene vaardigheden

Bladzijde 134

1 a $Q = 50$ geeft $36x^3 = 50$, dus $x = \sqrt[3]{\frac{25}{18}}$.

$$\frac{P}{Q} = \frac{23x^2}{36x^3} = \frac{23}{36x} = \frac{23}{36 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{18}}} \approx 0,57$$

b $\frac{10}{3x-5} = 3x-8$
 $(3x-5)(3x-8) = 10$
 $9x^2 - 24x - 15x + 40 = 10$
 $9x^2 - 39x + 30 = 0$
 $3x^2 - 13x + 10 = 0$
 $D = (-13)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 49$
 $x = \frac{13 \pm 7}{6} = 3\frac{1}{3} \vee x = \frac{13-7}{6} = 1$

c $\cos(\alpha) = \frac{AD}{3}$, dus $AD = 3 \cos(\alpha)$.

$$\sin(\alpha) = \frac{CD}{3}, \text{ dus } CD = 3 \sin(\alpha).$$

$$BD = \sqrt{10^2 - (3 \sin(\alpha))^2} = \sqrt{100 - 9 \sin^2(\alpha)}$$

$$AB = AD + BD = 3 \cos(\alpha) + \sqrt{100 - 9 \sin^2(\alpha)}$$

d $F = \frac{10a}{b^2} \left\{ F = \frac{10}{b^2} \cdot \frac{c}{2b} = \frac{10c}{2b^3} = \frac{5c}{b^3} \right\} F = \frac{5c}{((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}})^3} = \frac{5c}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
 $a = \frac{c}{2b} \left\{ b = \sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \right\}$

e $y^2 = \frac{A^2x}{p}, \text{ dus } y^4 = \frac{A^4x^2}{p^2} \left\{ y^4 = \frac{A^4x^2}{A+B} \right.$
 $p^2 = A+B \left. \right\} y = \sqrt[4]{\frac{A^4x^2}{A+B}} = A \cdot \sqrt[4]{\frac{x^2}{A+B}}$

f $g(x) = \frac{5}{2+\sqrt{x+4}} \cdot \frac{2-\sqrt{x+4}}{2-\sqrt{x+4}} = \frac{10-5\sqrt{x+4}}{4-(x+4)} = \frac{10-5\sqrt{x+4}}{-x} = \frac{5\sqrt{x+4}-10}{x} = f(x)$

g $N = at + b$

$$P(5) = 100, \text{ dus } 16N^3 = 100 \text{ en dit geeft } N = \sqrt[3]{\frac{100}{16}} = \sqrt[3]{6,25}.$$

$$P(8) = 200, \text{ dus } 16N^3 = 200 \text{ en dit geeft } N = \sqrt[3]{\frac{200}{16}} = \sqrt[3]{12,5}.$$

$$a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\sqrt[3]{12,5} - \sqrt[3]{6,25}}{8-5} = 0,159...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 0,159...t + b \\ t = 5 \text{ en } N = \sqrt[3]{6,25} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,159... \cdot 5 + b = \sqrt[3]{6,25} \\ b = 1,044... \end{array}$$

$$\text{Dus } N = 0,16t + 1,04.$$

$$\text{h } \left. \begin{array}{l} P = aQ \\ Q = 30 \text{ en } P = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 30a = 12 \\ a = 0,4 \end{array}$$

Dus $P = 0,4Q$.

$$Q \cdot R^{\frac{1}{3}} = 10, \text{ dus } R^{\frac{1}{3}} = \frac{10}{Q} \text{ en } R = \frac{1000}{Q^3}.$$

$$S = \frac{R}{R+1} = \frac{\frac{1000}{Q^3}}{\frac{1000}{Q^3} + 1} = \frac{1000}{1000 + Q^3}$$

$$T = 50PS = 50 \cdot 0,4Q \cdot \frac{1000}{1000 + Q^3} = \frac{20000Q}{Q^3 + 1000}$$

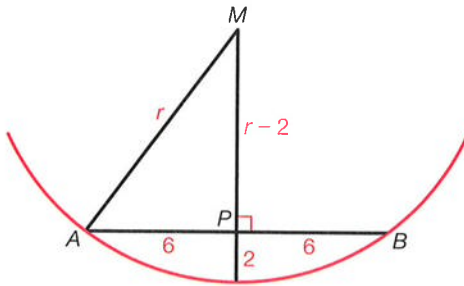
$$\text{i } \text{Voer in } y_1 = \frac{100}{\sqrt{x^2 + 17^2}} + \frac{100}{\sqrt{17^2 + (30-x)^2}}.$$

De optie minimum geeft $x = 15$ en $y = 8,821...$

De optie maximum geeft $x = 5,062...$ en $y = 8,951...$ en ook $x = 24,937...$ en $y = 8,951...$

$$\text{Dus } \frac{8,951... - 8,821...}{8,821...} \times 100\% \approx 1,47\%.$$

j



$$MP^2 + AP^2 = AM^2$$

$$(r-2)^2 + 6^2 = r^2$$

$$r^2 - 4r + 4 + 36 = r^2$$

$$-4r = -40$$

$$r = 10$$

Dus de straal van de cirkel is 10.

Bladzijde 142

$$2 \text{ a } AB = 1 + 4 = 5$$

$$\cos(\alpha) = \frac{AE}{1} \text{ geeft } AE = \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{CE}{1} \text{ geeft } CE = \sin(\alpha)$$

$$\text{In } \triangle CDE \text{ is } DE^2 = 16 - \sin^2(\alpha)$$

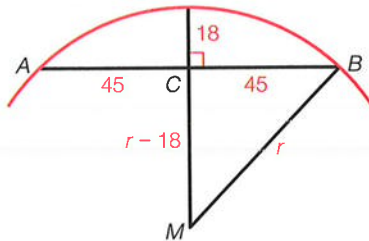
$$DE = \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$$

$$s = AB - AD = 5 - AE - DE = 5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$$

$$\text{b } \text{Voer in } y_1 = |5 - \cos(x) - \sqrt{16 - \sin^2(x)} - (1 - \cos(x) + \frac{1}{8}\sin^2(x))|.$$

De optie maximum geeft $x = 1,5707...$ en $y = 0,0020...$

Dus het maximale verschil is ongeveer 0,002.

Bladzijde 143**3**

$$\begin{aligned}\text{In } \triangle BCM \text{ is } r^2 &= (r-18)^2 + 45^2 \\ r^2 &= r^2 - 36r + 324 + 2025 \\ 36r &= 2349 \\ r &= 65\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Dus de straal is ongeveer 65 cm.

4

$$\begin{aligned}\frac{5}{4x-6} &= x - 3\frac{1}{2} \\ (4x-6)(x-3\frac{1}{2}) &= 5 \\ 4x^2 - 20x + 21 &= 5 \\ 4x^2 - 20x + 16 &= 0 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ (x-1)(x-4) &= 0 \\ x &= 1 \vee x = 4 \\ x = 1 &\text{ geeft } A(1, -2\frac{1}{2}) \\ x = 4 &\text{ geeft } B(4, \frac{1}{2})\end{aligned}$$

Bladzijde 144**5**

$$\left. \begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{x}{r} \\ E &= \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi r^2} \cdot \cos(\alpha) \end{aligned} \right\} E = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \frac{x}{r^3}$$

$$r^2 = x^2 + d^2, \text{ dus } r = (x^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} \text{ en } r^3 = (x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Dit geeft } E = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \frac{x}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{b } E_{\text{totaal}} = \frac{500}{4\pi} \cdot \frac{25}{(25^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{500}{4\pi} \cdot \frac{25}{(25^2 + (40-d)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{500}{4\pi} \cdot \frac{25}{(25^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{500}{4\pi} \cdot \frac{25}{(25^2 + (40-x)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

De optie minimum geeft $x = 20$ en $y = 0,0606...$ De optie maximum geeft $x = 1,924...$ en $y = 0,0736...$ en ook $x = 38,075...$ en $y = 0,0736...$

$$\frac{0,0606...}{0,0736...} \times 100\% = 82,34...\%$$

Dus het werkveld wordt voldoende gelijkmatig verlicht.

Bladzijde 145**6**

$$\left. \begin{aligned} (1) &\text{ geeft } v^2 = v_0^2 + 2g(h_0 - h) = v_0^2 + 2gx, \text{ dus } v = \sqrt{v_0^2 + 2gx} \\ (2) &\text{ geeft } r^2 = r_0^2 \cdot \frac{v_0}{v} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r^2 &= r_0^2 \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gx}} \\ r^4 &= r_0^4 \cdot \frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gx} \\ r &= r_0 \cdot \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gx}} \end{aligned}$$

7

$$h(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{x+1}} \cdot \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}} = \frac{2 - 2\sqrt{x+1}}{1 - (x+1)} = \frac{-2 + 2\sqrt{x+1}}{x} = f(x) \text{ voor } x \neq 0$$

Bladzijde 146

8 a $\frac{4}{3}\pi r^3 = 3^3$ geeft $r = \sqrt[3]{\frac{81}{4\pi}}$

$$\frac{A}{V} = \frac{4\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{81}{4\pi}}\right)^2}{27} \approx 1,61$$

b $r(t) = at + 1,5$

$$V(0) = \frac{4}{3}\pi \cdot 1,5^3 = 14,137\dots, \text{ dus } V(10) = \frac{1}{2} \cdot 14,137\dots = 7,068\dots$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 7,068\dots \text{ geeft } r = 1,190\dots$$

$$r(10) = 1,190\dots \text{ geeft } 10a + 1,5 = 1,190\dots$$

$$a = -0,030\dots$$

$$\text{Dus } r(t) = -0,030\dots t + 1,5.$$

$$r(t) = 0 \text{ geeft } -0,030\dots t + 1,5 = 0$$

$$t = 48,47\dots$$

Dus vanaf 49 minuten.

Bladzijde 147

9
$$\left. \begin{array}{l} N = aV \\ V = 20 \text{ en } N = 6 \end{array} \right\} a \cdot 20 = 6$$

 $a = 0,3$, dus $N = 0,3V$

$$V \cdot T^{0,25} = 150 \text{ geeft } T^{0,25} = \frac{150}{V}, \text{ dus } T = \left(\frac{150}{V}\right)^4.$$

$$d = \frac{T}{T+2} = \frac{\frac{150^4}{V^4}}{\frac{150^4}{V^4} + 2} = \frac{150^4}{150^4 + 2V^4} = \frac{1}{1 + \frac{2}{150^4} \cdot V^4}$$

$$A = 1440 \cdot N \cdot d = 1440 \cdot 0,3V \cdot \frac{1}{\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1} = \frac{432V}{\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1}$$

16.2 Functies en grafieken**Bladzijde 148**

10 a Stel de lengte van het vierkant is p .

$$\text{Dan geldt } f(1+p) = p, \text{ dus } (1+p-4)^2 = p$$

$$(p-3)^2 = p$$

$$p^2 - 6p + 9 - p = 0$$

$$p^2 - 7p + 9 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 13$$

$$p = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \vee p = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$$

vold. niet

$$\text{Dus de lengte van het vierkant is } \frac{7 - \sqrt{13}}{2} = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

b Er moet gelden $f_a(4+p) + f_a(4-p) = 2 \cdot y_p$.

$$f_a(4+p) + f_a(4-p) = \frac{16+4p+a}{4+p-4} + \frac{16-4p+a}{4-p-4} = \frac{16+4p+a}{p} - \frac{16-4p+a}{p} = \frac{8p}{p} = 8 = 2 \cdot y_p$$

Dus voor elke waarde van a is de grafiek van f_a puntsymmetrisch in $P(4, 4)$.

c Voor f geldt $y = \frac{1}{2}(x-4)^3 + 3$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{1}{2}(y-4)^3 + 3$

$$2x = (y-4)^3 + 6$$

$$(y-4)^3 = 2x - 6$$

$$y-4 = \sqrt[3]{2x-6}$$

$$y = 4 + \sqrt[3]{2x-6}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = 4 + \sqrt[3]{2x-6}.$$

d Voor f_b geldt $y = \frac{3}{x-2} + b$, dus voor f_b^{inv} geldt $x = \frac{3}{y-2} + b$

$$\frac{3}{y-2} = x - b$$

$$y - 2 = \frac{3}{x - b}$$

$$y = \frac{3}{x - b} + 2$$

$$f_b^{\text{inv}} = f_b \text{ voor } b = 2.$$

e $f(x) = \frac{6}{2x-5}$

↓ translatie $(-3, 2)$

$$g(x) = \frac{6}{2(x+3)-5} + 2 = \frac{6}{2x+1} + 2$$

Voor g geldt $y = \frac{6}{2x+1} + 2$, dus voor g^{inv} geldt $x = \frac{6}{2y+1} + 2$

$$\frac{6}{2y+1} = x - 2$$

$$2y + 1 = \frac{6}{x-2}$$

$$2y = \frac{6}{x-2} - 1 = \frac{6 - (x-2)}{x-2} = \frac{-x+8}{x-2}$$

$$y = \frac{-x+8}{2x-4}$$

Dus $g^{\text{inv}}(x) = \frac{-x+8}{2x-4}$.

f Los op $\sqrt[3]{2x-2} + 1 = x$

$$\sqrt[3]{2x-2} = x - 1$$

$$2x - 2 = (x - 1)^3$$

$$2(x - 1) = (x - 1)^3$$

$$x - 1 = 0 \vee 2 = (x - 1)^2$$

$$x = 1 \vee x - 1 = \sqrt{2} \vee x - 1 = -\sqrt{2}$$

$$x = 1 \vee x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$$

Dus $(1, 1)$, $(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ en $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$.

Alternatieve uitwerking

Voor f geldt $y = \sqrt[3]{2x-2} + 1$, dus voor f^{inv} geldt $x = \sqrt[3]{2y-2} + 1$

$$\sqrt[3]{2y-2} = x - 1$$

$$2y - 2 = (x - 1)^3$$

$$2y = 2 + (x - 1)^3$$

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)^3$$

Los op $\frac{1}{2}(x - 1)^3 + 1 = \sqrt[3]{2x-2} + 1$

$$(x - 1)^3 = 2 \cdot \sqrt[3]{2x-2}$$

$$(x - 1)^9 = 8(2x - 2)$$

$$(x - 1)^9 = 16(x - 1)$$

$$x - 1 = 0 \vee (x - 1)^8 = 2^4$$

$$x = 1 \vee x - 1 = 2^{\frac{1}{2}} \vee x - 1 = -2^{\frac{1}{2}}$$

$$x = 1 \vee x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$$

Dus $(1, 1)$, $(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ en $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$.

$$g \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5}{3x+6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{3 + \frac{6}{x}} = \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

Dus de horizontale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = \frac{2}{3}$.

$3x+6=0$ geeft $x=-2$, dus de verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x=-2$,
dus de horizontale asymptoot van de grafiek van f^{inv} is de lijn $y=-2$.

De gevraagde afstand is $\frac{2}{3} - (-2) = 2\frac{2}{3}$.

$$h \quad \text{Los op } \frac{5}{p(x-3)} + 6 = 2x$$

$$\frac{5}{p(x-3)} = 2x - 6$$

$$\frac{5}{p(x-3)} = 2(x-3)$$

$$2p(x-3)^2 = 5$$

$$(x-3)^2 = \frac{5}{2p}$$

$$x = 3 + \sqrt{\frac{5}{2p}} \vee x = 3 - \sqrt{\frac{5}{2p}}$$

$$\text{Dus } x_A = 3 + \sqrt{\frac{5}{2p}} \vee x_A = 3 - \sqrt{\frac{5}{2p}}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(3 + \sqrt{\frac{5}{2p}} \right) = 3 + 0 = 3$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(3 - \sqrt{\frac{5}{2p}} \right) = 3 - 0 = 3$$

$$\text{Dus } \lim_{p \rightarrow \infty} x_A = 3.$$

- i De teller moet een factor $(2x-1)$ bevatten. De andere factor van de teller is dan $(2x-3)$, want $2x \cdot 2x = 4x^2$ en $-1 \cdot -3 = 3$.

Dus de teller is $(2x-1)(2x-3) = 4x^2 - 6x - 2x + 3 = 4x^2 - 8x + 3$.

$$\text{Dus } f_{-8}(x) = \frac{4x^2 - 8x + 3}{(x^2 + 4)(2x-1)} = \frac{(2x-1)(2x-3)}{(x^2 + 4)(2x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f_{-8}(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-3)(2x-1)}{(x^2 + 4)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-3}{x^2 + 4} = \frac{1-3}{\frac{1}{4} + 4} = -\frac{8}{17}$$

De coördinaten van de perforatie zijn $(\frac{1}{2}, -\frac{8}{17})$.

- j Voor $x < 4$ is $|\frac{1}{4}x - 1| = -\frac{1}{4}x + 1$,

dus voor $x < 4$ is $f(x) = (-\frac{1}{4}x + 1)(\frac{1}{2}x + 3) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + 3$ en $f'(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

$$\lim_{x \uparrow 4} f'(x) = \lim_{x \uparrow 4} (-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}) = -1 - \frac{1}{4} = -1\frac{1}{4}$$

Bladzijde 152

$$11 \quad a \quad \text{Voor } f_c \text{ geldt } y = \frac{1}{c(x-1)} + 1, \text{ dus voor } f_c^{\text{inv}} \text{ geldt } x = \frac{1}{c(y-1)} + 1$$

$$\frac{1}{c(y-1)} = x - 1$$

$$c(y-1) = \frac{1}{x-1}$$

$$y-1 = \frac{1}{c(x-1)}$$

$$y = \frac{1}{c(x-1)} + 1 = f_c(x)$$

$$b \quad f_c(1+p) + f_c(1-p) = \frac{1}{cp} + 1 - \frac{1}{cp} + 1 = 2$$

$$\text{Dus } \frac{f_c(1+p) + f_c(1-p)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

c Los op $\frac{1}{c(x-1)} + 1 = x$

$$\frac{1}{c(x-1)} = x - 1$$

$$c(x-1)^2 = 1$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{c}$$

$$x-1 = \sqrt{\frac{1}{c}} \vee x-1 = -\sqrt{\frac{1}{c}}$$

$$x = 1 + \sqrt{\frac{1}{c}} \vee x = 1 - \sqrt{\frac{1}{c}}$$

$$\text{Dus } x_A = 1 - \sqrt{\frac{1}{c}}.$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} x_A = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{c}}\right) = 1 - 0 = 1$$

A ligt op de lijn $y = x$, dus ook $\lim_{c \rightarrow \infty} y_A = 1$.

Dus het punt $S(1, 1)$ is het limietpunt van A.

12 a Voor f geldt $y = (x+1)^3 - 1$, dus voor f^{inv} geldt $x = (y+1)^3 - 1$

$$(y+1)^3 = x+1$$

$$y+1 = \sqrt[3]{x+1}$$

$$y = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

Dus g is de inverse van f .

b De grafieken van f en $g = f^{\text{inv}}$ snijden elkaar op de lijn $y = x$.

Dus los op $f(x) = x$.

Dit geeft $(x+1)^3 - 1 = x$

$$(x+1)^3 = x+1$$

$$x+1 = 0 \vee (x+1)^2 = 1$$

$$x = -1 \vee x+1 = 1 \vee x+1 = -1$$

$$x = -1 \vee x = 0 \vee x = -2$$

De gemeenschappelijke punten zijn $(-1, -1)$, $(0, 0)$ en $(-2, -2)$.

Bladzijde 153

13 Van de noemer is alleen 2 een nulpunt.

Voor een perforatie moet dus 2 ook een nulpunt van de teller zijn.

$$\text{Dus } px^2 + 4px + 6 = (x-2)(px-3)$$

$$px^2 + 4px + 6 = px^2 - 3x - 2px + 6$$

$$px^2 + 4px + 6 = px^2 - (2p+3)x + 6$$

Hieruit volgt $4p = -(2p+3)$

$$4p = -2p - 3$$

$$6p = -3$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f_{-\frac{1}{2}}(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(-\frac{1}{2}x-3)}{(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{1}{2}x-3}{x^2+1} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

Dus de perforatie is $(2, -\frac{4}{5})$.

14 De grafiek van f heeft de verticale asymptoot $x = 1\frac{1}{2}$, dus ook de grafiek van g heeft de verticale asymptoot $x = 1\frac{1}{2}$.

De grafiek van f heeft de horizontale asymptoot $y = 0$, dus de grafiek van g heeft de horizontale asymptoot $y = a$.

Dus de verticale asymptoot van de inverse van g is de lijn $x = a$.

$$\text{Dus } |a - 1\frac{1}{2}| = 4$$

$$a - 1\frac{1}{2} = 4 \vee a - 1\frac{1}{2} = -4$$

$$a = 5\frac{1}{2} \vee a = -2\frac{1}{2}$$

- 15 Stel de zijde van het vierkant is p .

$$\begin{aligned}\text{Er geldt } f(1+p) &= p, \text{ dus } \frac{1}{1+p} = p \\ p(1+p) &= 1 \\ p^2 + p - 1 &= 0 \\ D &= 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5 \\ p &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vee p = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

De lengte van de zijde is $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

- 16 $x_A = 2$, dus $A(2, 1)$.

$$\begin{aligned}\text{Voor } x < 2 \text{ geldt } f(x) &= (-x+2)\left(\frac{1}{2}x+2\right)+1 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 2x + x + 4 + 1 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - x + 5\end{aligned}$$

Voor $x < 2$ geldt $f'(x) = -x - 1$.

$$l: y = ax + b \text{ met } a = \lim_{x \uparrow 2} f'(x) = \lim_{x \uparrow 2} (-x - 1) = -3$$

$$\begin{aligned}y = -3x + b \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } A(2, 1) \end{array} \right\} &\begin{cases} -3 \cdot 2 + b = 1 \\ -6 + b = 1 \\ b = 7 \end{cases}\end{aligned}$$

Dus $l: y = -3x + 7$.

16.3 Differentiaal- en integraalrekening

Bladzijde 154

- 17 a $f(x) = \frac{5x}{0,1x^4 + 3}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(0,1x^4 + 3) \cdot 5 - 5x \cdot 0,4x^3}{(0,1x^4 + 3)^2} = \frac{0,5x^4 + 15 - 2x^4}{(0,1x^4 + 3)^2} = \frac{-1,5x^4 + 15}{(0,1x^4 + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } -1,5x^4 + 15 = 0$$

$$x^4 = 10$$

$$x = \sqrt[4]{10} \quad (x > 0)$$

Dus de functie is maximaal voor $x = \sqrt[4]{10}$.

- b $H = \frac{2x}{(x^2 + 4)^{1/2}}$ geeft

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dx} &= \frac{(x^2 + 4)^{1/2} \cdot 2 - 2x \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1/2} \cdot 2x}{(x^2 + 4)^3} = \frac{(x^2 + 4) \cdot 2 - 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x}{(x^2 + 4)^{2\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2x^2 + 8 - 6x^2}{(x^2 + 4)^{2\frac{1}{2}}} = \frac{8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^{2\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

$$\frac{dH}{dx} = 0 \text{ geeft } 8 - 4x^2 = 0$$

$$4x^2 = 8$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \quad (x > 0)$$

Dus H is maximaal voor $x = \sqrt{2}$.

- c $b = OA + AB = OA + AD = a + f(a) = a + \frac{64}{3a\sqrt{a}} = a + \frac{64}{3}a^{-1\frac{1}{2}}$

$$\frac{db}{da} = 1 - 32a^{-2\frac{1}{2}} = 1 - \frac{32}{a^{2\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{db}{da} = 0 \text{ geeft } 1 - \frac{32}{a^{2\frac{1}{2}}} = 0$$

$$a^{2\frac{1}{2}} = 32$$

$$a^{2\frac{1}{2}} = 2^5$$

$$a = 2^2 = 4$$

$$a = 4 \text{ geeft } b = 4 + \frac{64}{3 \cdot 4 \cdot 2} = 6\frac{2}{3}$$

De minimale waarde van b is $6\frac{2}{3}$.

d $f(0) = \frac{8}{1 + \sqrt{9}} = \frac{8}{4} = 2$ en $g(0) = 0 + 2 = 2$, dus $(0, 2)$ is snijpunt.

$f(x) = \frac{8}{1 + \sqrt{2x+9}}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(1 + \sqrt{2x+9}) \cdot 0 - 8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+9}} \cdot 2}{(1 + \sqrt{2x+9})^2} = \frac{-8}{(1 + \sqrt{2x+9})^2 \cdot \sqrt{2x+9}}$$

$$f'(0) = \frac{-8}{(1 + \sqrt{9})^2 \cdot \sqrt{9}} = \frac{-8}{16 \cdot 3} = -\frac{1}{6}$$

$g'(x) = 6$, dus $g'(0) = 6$.

Er geldt $f'(0) \cdot g'(0) = -\frac{1}{6} \cdot 6 = -1$, dus de grafieken van f en g snijden elkaar loodrecht in het punt $(0, 2)$.

e Voor raken moet gelden $f_p(x) = g(x) \wedge f'_p(x) = g'(x)$.

$f'_p(x) = g'(x)$ geeft $2x + p = 1$, dus $p = 1 - 2x$.

$p = 1 - 2x$ invullen bij $f_p(x) = g(x)$ geeft $x^2 + (1 - 2x) \cdot x + 2(1 - 2x) = x + 5$

$$x^2 + x - 2x^2 + 2 - 4x = x + 5$$

$$-x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x + 1)(x + 3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = -3$$

$x = -1$ geeft $p = 1 - 2 \cdot -1 = 3$

$x = -3$ geeft $p = 1 - 2 \cdot -3 = 7$

18 a $f(x) = x\sqrt{x} = x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

k: $y = ax + b$ met $a = f'(p) = 1\frac{1}{2}\sqrt{p}$

$$y = 1\frac{1}{2}\sqrt{p} \cdot x + b \quad \left. \begin{array}{l} 1\frac{1}{2}\sqrt{p} \cdot p + b = p\sqrt{p} \\ \text{door } P(p, p\sqrt{p}) \end{array} \right\} b = -\frac{1}{2}p\sqrt{p}$$

Dus k: $y = 1\frac{1}{2}\sqrt{p} \cdot x - \frac{1}{2}p\sqrt{p}$.

k snijden met de x-as geeft $1\frac{1}{2}\sqrt{p} \cdot x = \frac{1}{2}p\sqrt{p}$

$$x = \frac{1}{3}p, \text{ dus } A(\frac{1}{3}p, 0).$$

Punt B is $(p, 0)$.

$$\begin{aligned} O(V) &= \int_0^p x\sqrt{x} \, dx - O(\triangle ABP) = \int_0^p x^{1\frac{1}{2}} \, dx - O(\triangle ABP) = \left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} \right]_0^p - \frac{1}{2} \cdot (p - \frac{1}{3}p) \cdot p\sqrt{p} \\ &= \frac{2}{5}p^2\sqrt{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}p \cdot p\sqrt{p} = \frac{2}{5}p^2\sqrt{p} - \frac{1}{3}p^2\sqrt{p} = \frac{1}{15}p^2\sqrt{p} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{15}p^2\sqrt{p} = 4$$

$$p^2\sqrt{p} = 60$$

$$p^5 = 3600$$

$$p = \sqrt[5]{3600}$$

Bladzijde 155

$$\begin{aligned} \text{b } I(L) &= \pi \int_0^1 \left(\frac{6}{2x-5} \right)^2 dx + \pi \int_1^3 (x-3)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 36(2x-5)^{-2} dx + \pi \int_1^3 (x-3)^2 dx \\ &= \pi \left[36 \cdot \frac{1}{2} \cdot -(2x-5)^{-1} \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{3}(x-3)^3 \right]_1^3 \\ &= \pi \left[\frac{-18}{2x-5} \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{3}(x-3)^3 \right]_1^3 \\ &= \pi(6 - 3\frac{3}{5}) + \pi(0 + 2\frac{2}{3}) = 5\frac{1}{15}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } I(L) &= \pi \int_1^b (\sqrt[4]{x})^2 dx = \pi \int_1^b x^{\frac{1}{2}} dx = \pi \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^b = \pi \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_1^b = \pi \left(\frac{2}{3} b \sqrt{b} - \frac{2}{3} \right) \\ \text{Los op } \frac{2}{3} b \sqrt{b} - \frac{2}{3} &= 17 \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} b \sqrt{b} &= 18 \\ b \sqrt{b} &= 27 \\ b^{\frac{3}{2}} &= 3^3 \\ b &= 3^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\text{d } I(L) = \pi \int_0^5 \left(0,05 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,6}{0,8 + 25x}} \right)^2 dx$$

De optie integraal geeft $\pi \int_0^5 \left(0,05 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,6}{0,8 + 25x}} \right)^2 dx = 0,00502\dots$

Dus $I(L) \approx 0,0050$.

$$\begin{aligned} \text{e } f(x) = 6 \text{ geeft } x + \sqrt{x} &= 6 \\ \sqrt{x} &= 6 - x \\ x &= 36 - 12x + x^2 \\ x^2 - 13x + 36 &= 0 \\ (x - 4)(x - 9) &= 0 \\ x &= 4 \vee x = 9 \\ &\text{vold. niet} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(L) &= \pi \int_0^4 (6^2 - (x + \sqrt{x})^2) dx = \pi \int_0^4 (36 - x^2 - 2x\sqrt{x} - x) dx = \pi \int_0^4 (36 - x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} - x) dx \\ &= \pi \left[36x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = \pi(144 - 21\frac{1}{3} - 25\frac{3}{5} - 8) = 89\frac{1}{15}\pi \end{aligned}$$

$$\text{f } I(B) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi, \text{ dus } 10\% \text{ hiervan is } 3,6\pi.$$

$$I(L) = \pi \int_p^3 x^2 dy = \pi \int_p^3 (9 - y^2) dy = \pi \left[9y - \frac{1}{3}y^3 \right]_p^3 = \pi(27 - 9 - 9p + \frac{1}{3}p^3) = \pi(\frac{1}{3}p^3 - 9p + 18)$$

$$\text{Los op } \frac{1}{3}p^3 - 9p + 18 = 3,6.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 18 \text{ en } y_2 = 3,6$$

De optie snijpunt geeft $x = 1,8251\dots$

Dus $p \approx 1,825$.

$$\text{g } I(L) = \pi \int_1^p x^2 dy = \pi \int_1^p y dy = \pi \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_1^p = \pi(\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2})$$

$$I(M) = \pi \int_1^p (y^2 - y) dy = \pi \left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 \right]_1^p = \pi(\frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2})$$

$$\text{Los op } \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{6} \text{ oftewel } p^2 - \frac{1}{3}p^3 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = x^2 - \frac{1}{3}x^3 \text{ en } y_2 = \frac{2}{3}.$$

De optie snijpunt geeft $x = 2,7320\dots$

Dus $p \approx 2,732$.

Bladzijde 160

$$\text{19 a } a = 1 \text{ geeft } b = 1 + 16 = 17$$

$$\begin{aligned} \text{inhoud} &= \pi \cdot \int_1^{17} \left(16^2 - \left(\frac{16}{\sqrt{x}} \right)^2 \right) dx = \pi \cdot \int_1^{17} \left(256 - \frac{256}{x} \right) dx = \pi \cdot [256x - 256 \ln |x|]_1^{17} \\ &= \pi(256 \cdot 17 - 256 \ln(17)) - (256 \cdot 1 - 256 \ln(1)) = \pi(4096 - 256 \ln(17)) \end{aligned}$$

$$b = a + AB = a + AD = a + \frac{16}{\sqrt{a}} = a + 16a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{db}{da} = 1 - 8a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{db}{da} = 0 \text{ geeft } 1 - 8a^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = 8$$

$$a^3 = 64$$

$$a = 4$$

$$a = 4 \text{ geeft } b = 4 + \frac{16}{\sqrt{4}} = 12$$

Dus de minimale waarde van b is 12.

Bladzijde 161

$$20 \quad r_0 = 0,01, v_0 = 0,5 \text{ en } g = 9,81 \text{ geeft } r = 0,01 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,5^2}{0,5^2 + 2 \cdot 9,81x}}$$

$$I = \pi \int_0^{0,3} \left(0,01 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,5^2}{0,5^2 + 2 \cdot 9,81x}} \right)^2 dx$$

$$\text{De optie integraal geeft } \pi \int_0^{0,3} \left(0,01 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,5^2}{0,5^2 + 2 \cdot 9,81x}} \right)^2 dx = 3,165... \cdot 10^{-5}.$$

Dus de inhoud is $3,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 32 \text{ cm}^3$.

Bladzijde 162

$$21 \quad \begin{aligned} \text{inhoud} &= \pi \int_0^1 \left(\frac{5}{4x-6} \right)^2 dx + \pi \int_1^{3\frac{1}{2}} (x - 3\frac{1}{2})^2 dx = \pi \int_0^1 25(4x-6)^{-2} dx + \pi \int_1^{3\frac{1}{2}} (x - 3\frac{1}{2})^2 dx \\ &= \pi \left[25 \cdot \frac{1}{4} \cdot -(4x-6)^{-1} \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{3} (x - 3\frac{1}{2})^3 \right]_1^{3\frac{1}{2}} = \pi \left[\frac{-25}{4(4x-6)} \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{3} (x - 3\frac{1}{2})^3 \right]_1^{3\frac{1}{2}} \\ &= \pi \left(\frac{-25}{4 \cdot -2} - \frac{-25}{4 \cdot -6} \right) + \pi \left(0 - \frac{1}{3} (-2\frac{1}{2})^3 \right) = \pi \left(\frac{25}{8} - \frac{25}{24} \right) + \pi \cdot \frac{125}{24} = 7\frac{7}{24} \pi \end{aligned}$$

Dus de inhoud van het omwentelingslichaam is $7\frac{7}{24}\pi$.

$$22 \quad f(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{x+1}} = 2(1 + \sqrt{x+1})^{-1} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = -2(1 + \sqrt{x+1})^{-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{-1}{(1 + \sqrt{x+1})^2 \cdot \sqrt{x+1}}$$

$$f'(0) = \frac{-1}{2^2 \cdot 1} = -\frac{1}{4}$$

$$g(x) = \frac{4x^2 + x}{x} = 4x + 1 \text{ voor } x \neq 0$$

Dus $k: y = 4x + 1$.

$$f'(0) \cdot rc_k = -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1$$

Dus de lijn k snijdt de grafiek van f loodrecht.

$$23 \quad \begin{aligned} \pi \int_{-1,5}^p x^2 dy &= \pi \int_{-1,5}^p (2,25 - y^2) dy = \pi \left[2,25y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-1,5}^p = \pi \left(2,25p - \frac{1}{3}p^3 - (2,25 \cdot -1,5 - \frac{1}{3} \cdot (-1,5)^3) \right) \\ &= \pi \left(2,25p - \frac{1}{3}p^3 + 2,25 \right) \end{aligned}$$

Inhoud ijs is 92% van 14,137 geeft $\pi \left(2,25p - \frac{1}{3}p^3 + 2,25 \right) = 0,92 \cdot 14,137$.

Voer in $y_1 = \pi \left(2,25x - \frac{1}{3}x^3 + 2,25 \right)$ en $y_2 = 0,92 \cdot 14,137$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,978...$

Dus de bol steekt ongeveer $1,5 - 0,98 = 0,52 \text{ cm}$ boven het water uit.

Bladzijde 163

24 $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$, dus $f'(p) = 2p$.

$$\text{raaklijn } k: y = 2px + b \quad \left. \begin{array}{l} 2p \cdot p + b = p^2 \\ b = -p^2 \end{array} \right\}$$

Dus $k: y = 2px - p^2$.

k snijden met de x -as geeft $2px - p^2 = 0$
 $2px = p^2$

$$x = \frac{1}{2}p$$

$$O(\triangle OAP) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot p^2 = \frac{1}{4}p^3$$

$OP: y = \frac{p^2}{p}x$, dus $OP: y = px$.

$$O(V) = \int_0^p (px - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}px^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^p = \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{3}p^3 = \frac{1}{6}p^3$$

$$\frac{O(\triangle OAP)}{O(V)} = \frac{\frac{1}{4}p^3}{\frac{1}{6}p^3} = 1\frac{1}{2}$$

25 a $f_p(x) = p + \sqrt{x-p}$ geeft $f_p'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-p}}$

Voor raken geldt $f_p(x) = x + \frac{1}{4} \wedge f_p'(x) = 1$

$$p + \sqrt{x-p} = x + \frac{1}{4} \wedge \frac{1}{2\sqrt{x-p}} = 1$$

$$\text{Uit } \frac{1}{2\sqrt{x-p}} = 1 \text{ volgt } \sqrt{x-p} = \frac{1}{2} \left. \begin{array}{l} p + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{4} \\ p + \sqrt{x-p} = x + \frac{1}{4} \end{array} \right\} x - p = \frac{1}{4}$$

Ook uit $\sqrt{x-p} = \frac{1}{2}$ volgt $x - p = \frac{1}{4}$, dus de lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke $p \geq 1$.

b Het randpunt van de grafiek van f_p is (p, p) .

$$f_{p-1}(x) = p - 1 + \sqrt{x - (p-1)} = p - 1 + \sqrt{x - p + 1}$$

$$f_{p-1}(p) = p - 1 + \sqrt{p - p + 1} = p - 1 + \sqrt{1} = p$$

Dus het punt (p, p) ligt ook op de grafiek van f_{p-1} .

c l door $A(1, 1)$ en $B(2, 2)$, dus $l: y = x$.

$$\begin{aligned} O(V) &= \int_1^2 (f_1(x) - x) dx = \int_1^2 (1 + \sqrt{x-1} - x) dx = \int_1^2 (1 + (x-1)^{\frac{1}{2}} - x) dx \\ &= \left[x + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 \\ &= \left[x + \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = 2 + \frac{2}{3} - 2 - (1 + 0 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Bladzijde 164

26 $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b x dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_a^b = \pi \left(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 \right) = \frac{1}{2}\pi \cdot (b^2 - a^2)$

$$m = \frac{1}{2}(a + b)$$

$$A = \pi \cdot (\sqrt{m})^2 = \pi \cdot m = \pi \cdot \frac{1}{2}(a + b)$$

$$h \cdot A = (b - a) \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}(a + b) = \pi \cdot \frac{1}{2}(b - a)(b + a) = \frac{1}{2}\pi \cdot (b^2 - a^2)$$

Dus $V = h \cdot A$.

$$27 \quad A = \frac{432V}{\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1} \text{ geeft } \frac{dA}{dV} = \frac{\left(\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1\right) \cdot 432 - 432V \cdot \frac{8}{150^4} \cdot V^3}{\left(\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1\right)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dV} = 0 \text{ geeft } \frac{864}{150^4} \cdot V^4 + 432 - \frac{3456}{150^4} \cdot V^4 &= 0 \\ 864V^4 + 432 \cdot 150^4 - 3456V^4 &= 0 \\ 2592V^4 &= 432 \cdot 150^4 \\ V^4 &= \frac{432 \cdot 150^4}{2592} \\ V &\approx 95,8 \end{aligned}$$

Bladzijde 165

- 28 Als V wentelt om de y -as ontstaat het lichaam K .
Als W wentelt om de y -as ontstaat het lichaam L .

$$I(L) = \frac{1}{2} I(\text{bol}) = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$I(K) = \pi \int_0^r x^2 dy - \frac{2}{3} \pi r^3 = \pi \int_0^r y dy - \frac{2}{3} \pi r^3 = \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^r - \frac{2}{3} \pi r^3 = \pi \cdot \frac{1}{2} r^2 - \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$\begin{aligned} I(L) = I(K) \text{ geeft } \frac{2}{3} \pi r^3 &= \frac{1}{2} \pi r^2 - \frac{2}{3} \pi r^3 \\ \frac{4}{3} \pi r^3 &= \frac{1}{2} \pi r^2 \\ \frac{4}{3} r &= \frac{1}{2} \\ r &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

16.4 Exponenten en logaritmen**Bladzijde 166**

- 29 a $50 + 415 \cdot \log(4x + 3) = 382$
 $415 \cdot \log(4x + 3) = 332$
 $\log(4x + 3) = 0,8$
 $4x + 3 = 10^{0,8}$
 $4x = -3 + 10^{0,8}$
 $x = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot 10^{0,8}$
 $x \approx 0,827$
- b $\left. \begin{aligned} x = 40 \text{ en } y = 27 \text{ geeft } 40 \cdot 27^b &= c \\ x = 60 \text{ en } y = 10 \text{ geeft } 60 \cdot 10^b &= c \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 40 \cdot 27^b &= 60 \cdot 10^b \\ \left(\frac{27}{10}\right)^b &= 1\frac{1}{2} \\ b &= {}^{2,7}\log(1,5) = 0,408... \end{aligned}$

$$c = 60 \cdot 10^{0,408...} = 153,5...$$

Dus $b \approx 0,41$ en $c \approx 154$.

- c $F = b \cdot e^{-\frac{5G}{H}}$, dus $e^{-\frac{5G}{H}} = \frac{F}{b}$
- $$\begin{aligned} -\frac{5G}{H} &= \ln\left(\frac{F}{b}\right) \\ \frac{5G}{H} &= -\ln\left(\frac{F}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{F}\right) \\ G &= 0,2H \cdot \ln\left(\frac{b}{F}\right) \end{aligned}$$

d $f(x) = \frac{1}{4}e^x + e^{-x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{4}e^x - e^{-x}$

$f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{4}e^x = e^{-x}$

$$\frac{1}{4}(e^x)^2 = 1$$

$$(e^x)^2 = 4$$

$$e^x = 2$$

$$x = \ln(2)$$

$f(\ln(2)) = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} = 1$, dus $T(\ln(2), 1)$ en $p = \ln(2)$ en $q = 1$.

$y = a(x - (\ln(2))^2) + 1$

$f(0) = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4}$, dus $A(0, 1\frac{1}{4})$ } $a \cdot \ln^2(2) + 1 = 1\frac{1}{4}$

$$a \cdot \ln^2(2) = \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{1}{4\ln^2(2)}$$

e $f(x) = \ln(x^2 + x)$

↓ translatie (3, 0)

$g(x) = \ln((x-3)^2 + x-3) = \ln(x^2 - 6x + 9 + x - 3) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

$f(x) = g(x)$ geeft $\ln(x^2 + x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

$$x^2 + x = x^2 - 5x + 6$$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$

Dus $x_A = 1$.

$f(x) = \ln(x^2 + x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{x^2 + x}$, dus $f'(1) = \frac{3}{2}$.

$g(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ geeft $g'(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}$, dus $g'(1) = -\frac{3}{2}$.

$f'(1) \cdot g'(1) = \frac{3}{2} \cdot -\frac{3}{2} = -\frac{9}{4} \neq -1$

Dus de grafieken snijden elkaar niet loodrecht in A.

f $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$ en $g(0) = \ln(1) = 0$, dus de grafieken snijden elkaar in de oorsprong.

$f(x) = x e^{\frac{1}{2}x}$ geeft $f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + x \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = (1 + \frac{1}{2}x)e^{\frac{1}{2}x}$, dus $f'(0) = 1 \cdot e^0 = 1$.

$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = \ln(x+1)^{-1} = -\ln(x+1)$ geeft $g'(x) = -\frac{1}{x+1}$, dus $g'(0) = -\frac{1}{1} = -1$.

$f'(0) \cdot g'(0) = 1 \cdot -1 = -1$

Dus de grafieken snijden elkaar loodrecht in de oorsprong.

g Voor f geldt $y = \ln(x\sqrt{x})$, dus voor f^{inv} geldt $x = \ln(y\sqrt{y})$

$$y\sqrt{y} = e^x$$

$$y^3 = e^{2x}$$

$$y = e^{\frac{2}{3}x}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = e^{\frac{2}{3}x}$

↓ translatie (2, 1)

$$g(x) = e^{\frac{2}{3}(x-2)} + 1$$

De lengte van AB is $L = g(p) - f(p) = e^{\frac{2}{3}(p-2)} + 1 - \ln(p\sqrt{p})$.

Voer in $y_1 = e^{\frac{2}{3}(x-2)} + 1 - \ln(x\sqrt{x})$.

De optie minimum geeft $x = 2,1020...$ en $y = 0,9560...$

De minimale lengte van het lijnstuk AB is ongeveer 0,956.

h $\ln(x) = 0$ geeft $x = 1$

$\ln(x\sqrt{x}) = 0$ geeft $x\sqrt{x} = 1$ oftewel $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x\sqrt{x})}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^{\frac{3}{2}})}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3}{2} \ln(x)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

De perforatie heeft de coördinaten $(1, \frac{3}{2})$.

Bladzijde 167

30 a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{20 - e^{4x}}{e^{2x} - 10} = \frac{20 - 0}{0 - 10} = -2$
 De horizontale asymptoot is de lijn $y = -2$.

Los op $f(x) = -2$, dus $\frac{20 - e^{4x}}{e^{2x} - 10} = -2$
 $20 - e^{4x} = -2 \cdot e^{2x} + 20$
 $e^{4x} = 2 \cdot e^{2x}$
 $e^{2x} = 2$
 $2x = \ln(2)$
 $x = \frac{1}{2} \ln(2)$

Dus $x_A = \frac{1}{2} \ln(2)$.

b $\frac{BC}{BD} = \frac{f(p) - g(p)}{f(p)} = \frac{\ln(p) - (\ln(\sqrt[3]{p}) + 1)}{\ln(p)} = \frac{\ln(p) - \frac{1}{3} \ln(p) - 1}{\ln(p)} = \frac{\frac{2}{3} \ln(p) - 1}{\ln(p)} = \frac{2 \ln(p) - 3}{3 \ln(p)}$

$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(p) - 3}{3 \ln(p)} = \lim_{\ln(p) \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(p) - 3}{3 \ln(p)} = \lim_{\ln(p) \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{\ln(p)}}{3} = \frac{2 - 0}{3} = \frac{2}{3}$

Dus de grenswaarde van $\frac{BC}{BD}$ is $\frac{2}{3}$.

c $f(x) = 2^x + 2^{3-4x}$ geeft $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) + 2^{3-4x} \cdot \ln(2) \cdot -4$
 $f'(x) = 0$ geeft $\ln(2)(2^x - 4 \cdot 2^{3-4x}) = 0$
 $2^x = 4 \cdot 2^{3-4x}$
 $2^x = 2^2 \cdot 2^{3-4x}$
 $2^x = 2^{5-4x}$
 $x = 5 - 4x$
 $5x = 5$
 $x = 1$, dus $x_{\text{top}} = 1$

$O(V) = \int_0^1 (2^x + 2^{3-4x}) dx = \left[\frac{2^x}{\ln(2)} + \frac{1}{-4} \cdot \frac{2^{3-4x}}{\ln(2)} \right]_0^1 = \frac{2}{\ln(2)} - \frac{2^{-1}}{4 \ln(2)} - \left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{2^3}{4 \ln(2)} \right)$
 $= \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{8 \ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} + \frac{2}{\ln(2)} = \frac{16 - 1 - 8 + 16}{8 \ln(2)} = \frac{23}{8 \ln(2)}$

d $F(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ geeft $F'(x) = (2x + 1) \cdot e^{-x} + (x^2 + x + 1) \cdot e^{-x} \cdot -1$
 $= (2x + 1 - x^2 - x - 1)e^{-x}$
 $= (x - x^2)e^{-x}$

Dus $F(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ in een primitieve van $f(x) = (x - x^2)e^{-x}$.

$f(x) = g(x)$ geeft $(x - x^2)e^{-x} = x^2 - x$
 $(x^2 - x) \cdot -e^{-x} = (x^2 - x) \cdot 1$
 $x^2 - x = 0 \vee -e^{-x} = 1$
 $x(x - 1) = 0$
 $x = 0 \vee x = 1$

$O(V) = \int_0^1 (x - x^2)e^{-x} - (x^2 - x) dx = \left[(x^2 + x + 1)e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$
 $= 3e^{-1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - (e^0 - 0) = \frac{3}{e} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{e} - \frac{5}{6}$

e $f(0) = \ln(0 + e) = 1$
 $y = \ln(x^2 + e)$
 $x^2 + e = e^y$
 $x^2 = e^y - e$

$I(L) = \pi \int_1^2 x^2 dy = \pi \int_1^2 (e^y - e) dy = \pi [e^y - ey]_1^2 = \pi(e^2 - 2e - (e - e)) = \pi(e^2 - 2e)$

Bladzijde 173

31 a $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} + 2e^{-\frac{1}{2}x} \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}$
 $f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x} = 0$
 $e^{\frac{1}{2}x} = 4e^{-\frac{1}{2}x}$
 $e^x = 4$
 $x = \ln(4)$

Dus $x_T = \ln(4)$.

b $e^x = 4$, dus $e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{4} = 2$ en $e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}} = \frac{1}{2}$.
 $f(\ln(4)) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$, dus $T(\ln(4), 3\frac{1}{2})$.

$f(0) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1\frac{1}{2} = 4$, dus $A(0, 4)$.

$y = a(x - b)^2 + c$
 top $(\ln(4), 3\frac{1}{2})$ } $y = a(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}$

$y = a(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}$
 door $A(0, 4)$ } $a(0 - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2} = 4$
 $a \cdot \ln^2(4) = \frac{1}{2}$
 $a = \frac{1}{2\ln^2(4)}$

$y = \frac{1}{2\ln^2(4)}(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}$

Los op $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2\ln^2(4)}(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}\right) = 1$.

Voer in $y_1 = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2\ln^2(4)}(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}\right)$ en $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 5,1$.

32 a Voor f geldt $y = \ln(\sqrt{x})$, dus voor f^{inv} geldt $x = \ln(\sqrt{y})$
 $\sqrt{y} = e^x$
 $y = (e^x)^2 = e^{2x}$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = e^{2x}$.

b $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$
 $l(x) = g(x) - f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \ln(\sqrt{x})$
 Voer in $y_1 = \frac{1}{2}e^{2x} - \ln(\sqrt{x})$.

De optie minimum geeft $x = 0,2835...$ en $y = 1,5117...$

De gevraagde minimale lengte is 1,512.

c $\ln(x) = 0$ geeft $x = 1$
 $\ln(\sqrt{x}) = 0$ geeft $\sqrt{x} = 1$ oftewel $x = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}\ln(x)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Dus de perforatie is $(1, \frac{1}{2})$.

Bladzijde 174

33 a $AP = f(p) - 1 = \ln(p^2 + 1) - 1$ en

$BP = 1 - g(p) = 1 - \ln\left(\frac{e^2}{p^2 + 1}\right) = 1 - \ln(e^2) + \ln(p^2 + 1) = 1 - 2 + \ln(p^2 + 1) = \ln(p^2 + 1) - 1$

Dus $AP = BP$.

b $y = \ln(x^2 + 1)$
 $x^2 + 1 = e^y$
 $x^2 = e^y - 1$

inhoud $= 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 (e^y - 1) dy = 2\pi \cdot [e^y - y]_0^1 = 2\pi(e - 1 - (1 - 0)) = 2\pi(e - 2)$

$$\begin{aligned}
 c \quad y &= \ln(x^2 + 1) \\
 &\downarrow \text{translatie } (2, 0) \\
 y &= \ln((x-2)^2 + 1) = \ln(x^2 - 4x + 5) \\
 \text{Voor het snijpunt geldt } \ln(x^2 + 1) &= \ln(x^2 - 4x + 5) \\
 x^2 + 1 &= x^2 - 4x + 5 \\
 4x &= 4 \\
 x &= 1
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f'(1) = \frac{2}{1+1} = 1$$

$$\text{De afgeleide van de verschoven grafiek voor } x = 1 \text{ is } f'(1-2) = f'(-1) = \frac{-2}{1+1} = -1.$$

$1 \cdot -1 = -1$, dus de grafieken snijden elkaar loodrecht.

34 Voor raken geldt $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$.

$$f(x) = \ln(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ en } g(x) = \frac{1}{2e} \cdot x^2 \text{ geeft } g'(x) = \frac{1}{e} \cdot x$$

$$f'(x) = g'(x) \text{ geeft } \frac{1}{x} = \frac{1}{e} \cdot x$$

$$x^2 = e$$

$$x = \sqrt{e} \vee x = -\sqrt{e}$$

$$f(\sqrt{e}) = \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2} \text{ en } g(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e} \cdot e = \frac{1}{2}$$

Dus de grafieken van f en g raken elkaar.

Bladzijde 175

35 a $T_{\text{nat}}'(t) = 1050 \cdot e^{-\ln^2(t) + 6 \ln(t) - 9} \cdot \left(-2 \ln(t) \cdot \frac{1}{t} + 6 \cdot \frac{1}{t} \right)$

$$T_{\text{nat}}'(t) = 0 \text{ geeft } \frac{-2 \ln(t) + 6}{t} = 0$$

$$\ln(t) = 3$$

$$\text{De maximale temperatuur is } 20 + 1050 \cdot e^{-9 + 18 - 9} = 20 + 1050 \cdot e^0 = 1070^\circ\text{C}.$$

b Los op $20 + 345 \cdot \log(8t + 1) = 300$

$$345 \cdot \log(8t + 1) = 280$$

$$\log(8t + 1) = \frac{280}{345}$$

$$8t + 1 = 10^{\frac{280}{345}}$$

$$8t = -1 + 10^{\frac{280}{345}}$$

$$t = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot 10^{\frac{280}{345}} \approx 0,685$$

c $O(\text{bij } T_{\text{lab}}) = \int_{0,69}^{30} (T_{\text{lab}} - 300) dt$

$$\text{De optie integraal van de GR geeft } \int_{0,69}^{30} (T_{\text{lab}} - 300) dt \approx 11\,929.$$

Oplossen van de vergelijking $T_{\text{nat}} = 300$ met de optie snijpunt van de GR geeft $t = 6,36...$ en $t = 63,41...$

$$\text{Bereken } \int_{6,36...}^{30} (T_{\text{nat}} - 300) dt.$$

$$\text{De optie integraal van de GR geeft } \int_{6,36...}^{30} (T_{\text{nat}} - 300) dt \approx 14\,242.$$

Omdat $14\,242 > 11\,929$ zal gelden $t_b < 30$, dus de deur houdt tijdens de natuurlijke brand geen 30 minuten stand.

Bladzijde 176

36 a $k = A \cdot e^{-\frac{E}{8,314T}}$

$$e^{-\frac{E}{8,314T}} = \frac{k}{A}$$

$$-\frac{E}{8,314T} = \ln\left(\frac{k}{A}\right)$$

$$\frac{E}{8,314T} = -\ln\left(\frac{k}{A}\right) = \ln\left(\frac{k}{A}\right)^{-1} = \ln\left(\frac{A}{k}\right)$$

$$\text{Dus } E = 8,314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right).$$

b $k = 2,7 \cdot 10^{-2}$ en $T = 500$ geeft $E = 8,314 \cdot 500 \cdot \ln\left(\frac{A}{0,027}\right) = 4157 \cdot \ln\left(\frac{A}{0,027}\right)$.

$$k = 2,4 \cdot 10^{-1}$$
 en $T = 550$ geeft $E = 8,314 \cdot 550 \cdot \ln\left(\frac{A}{0,24}\right) = 4572,7 \cdot \ln\left(\frac{A}{0,24}\right)$.

$$\text{Voer in } y_1 = 4157 \cdot \ln\left(\frac{x}{0,027}\right) \text{ en } y_2 = 4572,7 \cdot \ln\left(\frac{x}{0,24}\right).$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 7,4 \cdot 10^8$ en $y \approx 9,99 \cdot 10^4$.

$$\text{Dus } E = 1,0 \cdot 10^5.$$

37 a $f(x) = 2^x + 2^{-2x}$ geeft $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) + 2^{-2x} \cdot \ln(2) \cdot -2$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2^x \cdot \ln(2) = 2 \cdot 2^{-2x} \cdot \ln(2)$$

$$2^x = 2^{-2x+1}$$

$$x = -2x + 1$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Bladzijde 177

b $O(V) = \int_{-1}^1 (2^x + 2^{-2x}) dx = \left[\frac{2^x}{\ln(2)} + \frac{1}{-2} \cdot \frac{2^{-2x}}{\ln(2)} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{-2}}{\ln(2)} - \left(\frac{2^{-1}}{\ln(2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{\ln(2)} \right)$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \cdot \left(2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{3\frac{3}{8}}{\ln(2)} = \frac{27}{8 \ln(2)}$$

$$O(W) = 2k, \text{ dus } 2k = \frac{27}{8 \ln(2)}$$

$$k = \frac{27}{16 \ln(2)} \approx 2,43$$

38 a $f_a(x) + f_1(x) = x - x \ln(ax) + x - x \ln\left(\frac{1}{a}x\right) = 2x - x \left(\ln(ax) + \ln\left(\frac{1}{a}x\right) \right)$

$$= 2x - x \left(\ln\left(ax \cdot \frac{1}{a}x\right) \right) = 2x - x \ln(x^2) = 2x - 2x \ln(x)$$

$$\frac{f_a(x) + f_1(x)}{2} = \frac{2x - 2x \ln(x)}{2} = x - x \ln(x) = f_1(x)$$

b $f_a(x) = 0$ geeft $x - x \ln(ax) = 0$

$$x(1 - \ln(ax)) = 0$$

$$x = 0 \vee \ln(ax) = 1$$

$$\text{vold. niet } ax = e, \text{ dus } x_S = \frac{e}{a}$$

$$f_a(x) = x - x \ln(ax) \text{ geeft } f_a'(x) = 1 - 1 \cdot \ln(ax) - x \cdot \frac{1}{ax} \cdot a = 1 - \ln(ax) - 1 = -\ln(ax)$$

$$f_a'(x) = 0 \text{ geeft } -\ln(ax) = 0$$

$$ax = 1, \text{ dus } x_T = \frac{1}{a}$$

$$\frac{x_S}{x_T} = \frac{\frac{e}{a}}{\frac{1}{a}} = e, \text{ dus de verhouding is constant.}$$

Bladzijde 178

- 39 a** $8 - 4x = 0$ geeft $x = 2$, dus de x -coördinaat van de knik is 2.
 Voor $x < 2$ is $f(x) = 4e^{2-x} + 8 - 4x$ en $f'(x) = 4e^{2-x} \cdot -1 - 4 = -4e^{2-x} - 4$.
 Voor $x > 2$ is $f(x) = 4e^{2-x} - 8 + 4x$ en $f'(x) = -4e^{2-x} + 4$.
 $rc_m = \lim_{x \uparrow 2} f'(x) = -4e^0 - 4 = -8$ en $rc_k = \lim_{x \downarrow 2} f'(x) = -4e^0 + 4 = 0$.
b $\lim_{x \rightarrow \infty} 4e^{2-x} = 0$
 De vergelijking van de asymptoot is $y = 4x - 8$.

- 40 a** $g(x) = f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$
 Los op $x \ln(x) - x + 1 = \ln(x)$
 $(x - 1) \ln(x) = x - 1$
 $x - 1 = 0 \vee \ln(x) = 1$
 $x = 1 \vee x = e$
b Een primitieve van g is f .

$$\int_p^{2p} g(x) dx = [f(x)]_p^{2p} = f(2p) - f(p) = 2p \ln(2p) - 2p + 1 - (p \ln(p) - p + 1)$$

$$= 2p \ln(2p) - p \ln(p) - p$$

$$\int_p^{2p} g(x) dx = 0 \text{ geeft } 2p \ln(2p) - p \ln(p) - p = 0$$

$$p(2 \ln(2p) - \ln(p) - 1) = 0$$

$$p = 0 \vee \ln(4p^2) - \ln(p) = 1$$

 vold. niet $\ln\left(\frac{4p^2}{p}\right) = 1$

$$\ln(4p) = 1$$

$$4p = e$$

$$p = \frac{1}{4}e$$

Bladzijde 179

- 41 a** $f_a'(x) = 0$ geeft $e^{ax} + ax e^{ax} = 0$
 $e^{ax}(1 + ax) = 0$
 $1 + ax = 0$
 $a = -\frac{1}{x}$
 $a = -\frac{1}{x}$ invullen bij de formule van f_a geeft
 $y = x e^{-\frac{1}{x} \cdot x} = x e^{-1}$ oftewel $y = \frac{1}{e}x$, dus de top ligt op lijn l .
b $F_a'(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + \frac{1}{a}x \cdot e^{ax} \cdot a - \frac{1}{a^2} e^{ax} \cdot a = \frac{1}{a} e^{ax} + x e^{ax} - \frac{1}{a} e^{ax} = x e^{ax} = f_a(x)$, dus F_a is een primitieve van f_a .
c $f_1(x) = \frac{1}{e}x$ geeft $x e^x = \frac{1}{e}x$
 $x = 0 \vee e^x = \frac{1}{e}$
 $x = 0 \vee x = -1$

$$O(V) = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{e}x - f_1(x) \right) dx = \left[\frac{1}{2e}x^2 - F_1(x) \right]_{-1}^0 = \left[\frac{1}{2e}x^2 - x e^x + e^x \right]_{-1}^0 = 0 - 0 + 1 - \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \right) = 1 - \frac{5}{2e}$$

$$\begin{aligned}
 42 \quad & \left. \begin{aligned} V = 20 \text{ en } T = 116 \text{ geeft } 20 \cdot 116^m = C \\ V = 30 \text{ en } T = 40 \text{ geeft } 30 \cdot 40^m = C \end{aligned} \right\} 20 \cdot 116^m = 30 \cdot 40^m \\
 & \frac{116^m}{40^m} = \frac{30}{20} \\
 & \left(\frac{116}{40}\right)^m = 1,5 \\
 & 2,9^m = 1,5 \\
 & m = {}^{2,9}\log(1,5) = 0,380...
 \end{aligned}$$

$$C = 20 \cdot 116^{0,380...} = 122,24...$$

Dus $m \approx 0,38$ en $C \approx 122$.

Bladzijde 180

$$43 \quad a \quad d = f_{0,7}(3) - f_{0,7}(0) = 5,920... - 1,428... = 4,491...$$

$$\text{Los op } \frac{8 \cdot 4,491...}{l^2 - 4 \cdot 4,491...^2} = 0,7.$$

$$\text{Invoeren van } y_1 = \frac{8 \cdot 4,491...}{x^2 - 4 \cdot 4,491...^2} \text{ en } y_2 = 0,7 \text{ en de optie snijpunt geeft } x = 11,491...$$

Dus $l \approx 11,49$.

$$b \quad l = 49,63 \text{ en } d = 20,51 \text{ geeft } k = \frac{8 \cdot 20,51}{49,63 - 4 \cdot 20,51^2} = 0,210..., \text{ dus } \frac{1}{2k} \approx 2,38.$$

$$y_T = f_k(0) = \frac{1}{2k}(e^0 + e^0) = \frac{1}{2k}(1 + 1) = \frac{1}{k}$$

$$y = 2,38(e^{0,21x} + e^{-0,21x})$$

↓ spiegelen in de x-as

$$y = -2,38(e^{0,21x} + e^{-0,21x})$$

$$\downarrow \text{translatie } \left(0; 20,51 + \frac{1}{0,210...}\right) = \text{translatie } (0; 25,66...)$$

$$h(x) = -2,38(e^{0,21x} + e^{-0,21x}) + 25,27$$

Bladzijde 181

$$44 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1000}{e^x - 10} = \frac{0 - 1000}{0 - 10} = 100, \text{ dus de horizontale asymptoot is de lijn } y = 100.$$

$e^x - 10 = 0$ geeft $e^x = 10$, dus de lijn $x = \ln(10)$ is verticale asymptoot.

Dus $A(0, 100)$ en $B(\ln(10), 100)$.

$$\text{Los op } \frac{e^{2x} - 1000}{e^x - 10} = 100$$

$$e^{2x} - 1000 = 100e^x - 1000$$

$$e^{2x} - 100e^x = 0$$

$$e^x(e^x - 100) = 0$$

$$e^x = 100$$

Dus $x_C = \ln(100) = \ln(10^2) = 2 \ln(10) = 2x_B$ en dus is B het midden van lijnstuk AC .

$$45 \quad a \quad \text{Stel } x_A = p.$$

Er geldt $q = f(p) = g(p + 3)$.

$$f(p) = g(p + 3) \text{ geeft } \log(\sqrt{p}) = \log((p + 3)\sqrt{p + 3}) - 1$$

$$\text{Voer in } y_1 = \log(\sqrt{x}) \text{ en } y_2 = \log((x + 3)\sqrt{x + 3}) - 1.$$

De optie snijpunt geeft $x = 0,389...$ en $y = -0,204...$ en ook $x = 4,864...$ en $y = 0,343...$

Dus $q \approx -0,20$ en $q \approx 0,34$.

$$b \quad CD = g(p) - f(p) = \log(p\sqrt{p}) - 1 - \log(\sqrt{p}) = \log\left(\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{p}}\right) - 1 = \log(p) - 1$$

$$CE = f(p) = \log(\sqrt{p}) = \log(p^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \log(p)$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{\log(p) - 1}{\frac{1}{2} \log(p)} = \frac{2 \log(p) - 2}{\log(p)}$$

$$c \quad \text{De grenswaarde is } \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2 \log(p) - 2}{\log(p)} = \lim_{\log(p) \rightarrow \infty} \frac{2 \log(p) - 2}{\log(p)} = \lim_{\log(p) \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{\log(p)}}{1} = \frac{2 - 0}{1} = 2.$$

16.5 Meetkunde

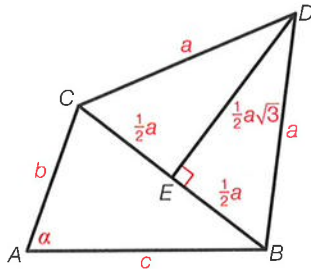
Bladzijde 182

46 a De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft $BD^2 + x^2 = (x+1)^2$
 $BD^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2$
 $BD^2 = 2x + 1$
 $BD = \sqrt{2x+1}$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AB^2 + x^2 = (x+3)^2$
 $(\sqrt{2x+1} + 4)^2 + x^2 = x^2 + 6x + 9$
 $2x + 1 + 8\sqrt{2x+1} + 16 = 6x + 9$
 $8\sqrt{2x+1} = 4x - 8$
 $2\sqrt{2x+1} = x - 2$
 $4(2x+1) = (x-2)^2$
 $8x + 4 = x^2 - 4x + 4$
 $x^2 - 12x = 0$
 $x(x-12) = 0$
 $x = 0 \vee x = 12$

Dus $BC = 12$.

b De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.



$$O(\triangle BCD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{3} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = \frac{1}{4} \sqrt{3} \cdot (b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha))$$

c De cosinusregel geeft $(x+5)^2 = x^2 + 10^2 - 2 \cdot x \cdot 10 \cdot \cos(\angle A)$
 $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 100 - 20x \cos(\angle A)$
 $20x \cos(\angle A) = 75 - 10x$
 $\cos(\angle A) = \frac{75 - 10x}{20x} = \frac{15 - 2x}{4x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15 - 2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{15}{x} - 2}{4} = \frac{0 - 2}{4} = -\frac{1}{2}$$

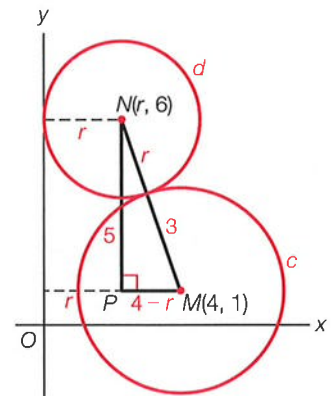
$\cos(\angle A) = -\frac{1}{2}$ geeft $\angle A = 120^\circ$, dus de gevraagde limiet is 120° .

d $c: x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 2y + 8 = 0$
 $(x-4)^2 - 16 + (y-1)^2 - 1 + 8 = 0$
 $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$

Dus $M(4, 1)$ en $r_c = 3$.

Stel $r_d = r$, dan is $MN = r + 3$, $PM = 4 - r$ en $NP = 6 - 1 = 5$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle MNP$ geeft $(4-r)^2 + 5^2 = (r+3)^2$
 $16 - 8r + r^2 + 25 = r^2 + 6r + 9$
 $-14r = -32$
 $r = \frac{32}{14} = 2\frac{2}{7}$



$$\begin{aligned} \text{e } \left. \begin{array}{l} x^2 + (y-1)^2 = 7 \\ y = x^2 \end{array} \right\} & \begin{array}{l} y + (y-1)^2 = 7 \\ y + y^2 - 2y + 1 - 7 = 0 \\ y^2 - y - 6 = 0 \\ (y+2)(y-3) = 0 \\ y = -2 \vee y = 3 \\ \text{vold. niet} \end{array} \end{aligned}$$

$y = 3$ geeft $x^2 = 3$, dus $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$.
De snijpunten zijn $(\sqrt{3}, 3)$ en $(-\sqrt{3}, 3)$.

f m is de middelloodlijn van het lijnstuk AB .

$$rc_{AB} = \frac{-2 - (-1)}{4 - (-1)} = -\frac{1}{5}, \text{ dus } rc_m = 5.$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = 5x + b \\ \text{midden van } AB \text{ is } (1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \cdot 1\frac{1}{2} + b = -1\frac{1}{2} \\ b = -9 \end{array}$$

$$\begin{aligned} m: y = 5x - 9 \text{ snijden met } c \text{ geeft } x^2 + (5x-9)^2 - 4x - 2(5x-9) - 8 &= 0 \\ x^2 + 25x^2 - 90x + 81 - 4x - 10x + 18 - 8 &= 0 \\ 26x^2 - 104x + 91 &= 0 \\ 2x^2 - 8x + 7 &= 0 \\ D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 &= 8 \\ x = \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{4} = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Bladzijde 186

$$47 \text{ a } rc_{AB} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}, \text{ dus } rc_{AC} = -2.$$

$AC: y = -2x + b$ door $A(4, 0)$ geeft $AC: y = -2x + 8$.

$$\begin{aligned} y = -2x + 8 \text{ snijden met } x^2 + (y-3)^2 = 25 \text{ geeft } x^2 + (-2x+5)^2 &= 25 \\ x^2 + 4x^2 - 20x + 25 &= 25 \\ 5x^2 - 20x &= 0 \\ 5x(x-4) &= 0 \\ x = 0 \vee x = 4 \end{aligned}$$

Dus $C(0, 8)$.

In het geval je bent uitgegaan van $\angle B = 90^\circ$, dan krijg je $C(-4, 6)$.

b C is het snijpunt van de cirkel c met de cirkel d met middelpunt A en straal AB .

$$\left. \begin{array}{l} d: (x-4)^2 + y^2 = r^2 \\ \text{door } B(0, -2) \end{array} \right\} r^2 = (0-4)^2 + (-2)^2 = 20$$

Dus $d: x^2 - 8x + 16 + y^2 = 20$ oftewel $d: x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0$.

$$\begin{aligned} c: x^2 + (y-3)^2 &= 25 \\ x^2 + y^2 - 6y + 9 &= 25 \\ x^2 + y^2 - 6y - 16 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \text{ snijden met } c \text{ geeft } \begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0 \end{cases} \\ \hline -8x + 6y + 12 = 0 \\ 6y = 8x - 12 \\ y = \frac{4}{3}x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = \frac{4}{3}x - 2 \text{ snijden met } d \text{ geeft } x^2 + (\frac{4}{3}x - 2)^2 - 8x - 4 &= 0 \\ x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{16}{3}x + 4 - 8x - 4 &= 0 \\ \frac{25}{9}x^2 - \frac{40}{3}x &= 0 \\ x(\frac{25}{9}x - \frac{40}{3}) &= 0 \\ x = 0 \vee x = \frac{\frac{40}{3}}{\frac{25}{9}} = \frac{24}{5} \end{aligned}$$

$$x = \frac{24}{5} \text{ geeft } y = \frac{4}{3} \cdot \frac{24}{5} - 2 = 4\frac{2}{5}$$

Dus $C(4\frac{4}{5}, 4\frac{2}{5})$.

Bladzijde 187

48 $\alpha + \beta + 2 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ (volle hoek), dus $\beta = 180^\circ - \alpha$.

De oppervlakte van de lichte delen is $p^2 + q^2$.

De cosinusregel in de driehoek met hoek α geeft

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos(\alpha).$$

De cosinusregel in de driehoek met hoek β geeft

$$s^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos(\beta) = p^2 + q^2 - 2pq \cos(180^\circ - \alpha) = p^2 + q^2 + 2pq \cos(\alpha).$$

$$\text{Hieruit volgt } \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - 2pq \cos(\alpha)) + \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + 2pq \cos(\alpha)) = p^2 + q^2.$$

Dus de oppervlakte van de donkere delen is gelijk aan de oppervlakte van de lichte delen.

Bladzijde 188

49 a In $\triangle ADN$ is $AD^2 + DN^2 = r^2$.

In $\triangle ADM$ is $AD^2 + (DN - 1)^2 = 1^2$.

$$\begin{cases} AD^2 + DN^2 = r^2 \\ AD^2 + (DN - 1)^2 = 1^2 \end{cases}$$

$$\frac{AD^2 + DN^2 = r^2}{AD^2 + (DN - 1)^2 = 1^2} \quad \text{---}$$

$$DN^2 - (DN^2 - 2DN + 1) = r^2 - 1$$

$$DN^2 - DN^2 + 2DN - 1 = r^2 - 1$$

$$2DN = r^2$$

$$DN = \frac{1}{2}r^2$$

b $DM = DN - 1 = \frac{1}{2}r^2 - 1$

$$CD = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}(r - 1)$$

$$DM = CD \text{ geeft } \frac{1}{2}r^2 - 1 = \frac{1}{2}(r - 1)$$

$$r^2 - 2 = r - 1$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$D = \frac{(-1) \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee r = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ vold. niet}$$

$$\text{Dus } r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

50 Stel de straal van d is gelijk aan r .

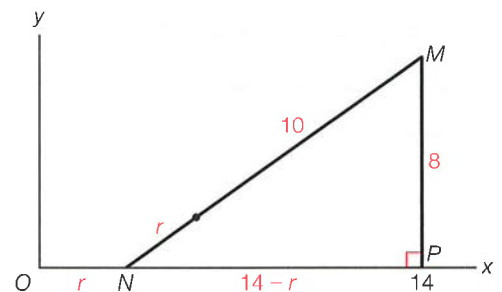
Zie de figuur hiernaast.

In $\triangle NPM$ is $(14 - r)^2 + 8^2 = (r + 10)^2$

$$196 - 28r + r^2 + 64 = r^2 + 20r + 100$$

$$-48r = -160$$

$$r = 3\frac{1}{3}$$



Bladzijde 189

51 a In $\triangle M_1 M_2 M_3$ geeft de cosinusregel

$$(r+2)^2 = 8^2 + (r+6)^2 - 2 \cdot 8 \cdot (r+6) \cdot \cos(\angle M_1 M_2 M_3)$$

$$r^2 + 4r + 4 = 64 + r^2 + 12r + 36 - (16r + 96) \cdot \cos(\angle M_1 M_2 M_3)$$

$$(16r + 96) \cdot \cos(\angle M_1 M_2 M_3) = 8r + 96$$

$$\cos(\angle M_1 M_2 M_3) = \frac{8r + 96}{16r + 96} = \frac{8(r+12)}{8(2r+12)} = \frac{r+12}{2r+12}$$

b $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r+12}{2r+12} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{12}{r}}{2 + \frac{12}{r}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$

Dus $\cos(\angle M_1 M_2 M_3) = \frac{1}{2}$ en dit geeft $\angle M_1 M_2 M_3 = 60^\circ$.

c Stel $M_1 P = p$.

In $\triangle P M_1 M_3$ is $r^2 + p^2 = (r+2)^2$

$$r^2 + p^2 = r^2 + 4r + 4$$

$$p^2 = 4r + 4 \dots (1)$$

In $\triangle P M_2 M_3$ is $r^2 + (p+8)^2 = (r+6)^2$

$$r^2 + p^2 + 16p + 64 = r^2 + 12r + 36$$

$$p^2 = 12r - 16p - 28 \dots (2)$$

Uit (1) en (2) volgt $4r + 4 = 12r - 16p - 28$

$$16p = 8r - 32$$

$$p = \frac{1}{2}r - 2 \dots (3)$$

Uit (1) en (3) volgt $(\frac{1}{2}r - 2)^2 = 4r + 4$

$$\frac{1}{4}r^2 - 2r + 4 = 4r + 4$$

$$\frac{1}{4}r^2 - 6r = 0$$

$$\frac{1}{4}r(r - 24) = 0$$

$$r = 0 \vee r = 24$$

vold. niet

Dus $r = 24$.

Bladzijde 190

52 Snijden van de cirkel $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ met de parabool $y = x^2$ geeft

$$y + (y-r)^2 = r^2$$

$$y + y^2 - 2yr + r^2 = r^2$$

$$y^2 + (1-2r)y = 0$$

$$y(y+1-2r) = 0$$

$$y = 0 \vee y = 2r-1$$

Omdat $y = x^2$ is $x^2 = 2r-1$ en deze vergelijking moet twee oplossingen hebben.

Dus $2r-1 > 0$ oftewel $r > \frac{1}{2}$.

53 $P(p, p(p-3)^2 + 2)$ en $A(7, 0)$ geeft $AP = \sqrt{(p-7)^2 + (p(p-3)^2 + 2)^2}$

Voer in $y_1 = \sqrt{(x-7)^2 + (x(x-3)^2 + 2)^2}$.

De optie minimum geeft $y = 4,349\dots$

Dus de minimale lengte is 4,35.

16.6 Vectoren en bewegingsvergelijkingen**Bladzijde 191**

54 a $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y - 12 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 - 12 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

Dus $M(3, 2)$ en $r = 5$.

$$y = 6 \text{ geeft } (x-3)^2 + 16 = 25$$

$$(x-3)^2 = 9$$

$$x-3 = 3 \vee x-3 = -3$$

$$x = 6 \vee x = 0$$

Dus $A(0, 6)$ en $B(6, 6)$.

$$y = -1 \text{ geeft } (x-3)^2 + 9 = 25$$

$$(x-3)^2 = 16$$

$$x-3 = 4 \vee x-3 = -4$$

$$x = 7 \vee x = -1$$

Dus $C(-1, -1)$ en $D(7, -1)$.

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle BMC) = \cos(\angle(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{-12 - 12}{5 \cdot 5} = -\frac{24}{25},$$

dus $\angle BMC \approx 163,7^\circ$.

b $P(2-t, \frac{1}{2}+3t)$

$$AP^2 = (2-t)^2 + (3t-\frac{1}{2})^2 = 4 - 4t + t^2 + 9t^2 - 3t + \frac{1}{4} = 10t^2 - 7t + 4\frac{1}{4}$$

$$BP^2 = (-t-2)^2 + (3t-2\frac{1}{2})^2 = t^2 + 4t + 4 + 9t^2 - 15t + 6\frac{1}{4} = 10t^2 - 11t + 10\frac{1}{4}$$

$$AP^2 = BP^2 \text{ geeft } 10t^2 - 7t + 4\frac{1}{4} = 10t^2 - 11t + 10\frac{1}{4}$$

$$4t = 6$$

$$t = 1\frac{1}{2}$$

$t = 1\frac{1}{2}$ geeft $P(\frac{1}{2}, 5)$

c $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P(p, \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1)$ op de grafiek van f .

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p \\ \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1 \end{pmatrix}$$

Er moet gelden $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p-1 \\ \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$4(p-1) + \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1 = 0$$

$$4p - 4 + \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1 = 0$$

$$\frac{1}{4}p^2 + 2\frac{3}{4}p - 3 = 0$$

$$p^2 + 11p - 12 = 0$$

$$(p-1)(p+12) = 0$$

$$p = 1 \vee p = -12$$

$p = 1$ geeft $A(1, 0)$ en $p = -12$ geeft $P(-12, 52)$.

d $P(1+2t, 1+t)$

$$d(P, x\text{-as}) = |1+t|$$

$$d(P, k) = \frac{|3(1+2t) + 4(1+t) - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|3 + 6t + 4 + 4t - 12|}{5} = \frac{|10t - 5|}{5} = |2t - 1|$$

$$d(P, x\text{-as}) = d(P, k) \text{ geeft } |1+t| = |2t-1|$$

$$1+t = 2t-1 \vee 1+t = -2t+1$$

$$-t = -2 \vee 3t = 0$$

$$t = 2 \vee t = 0$$

$t = 2$ geeft straal = 3 en $t = 0$ geeft straal = 1.

e Lijn l door $A(-1, 1)$ loodrecht op $k: 4x + 3y = 12$.

$$\left. \begin{array}{l} l: 3x - 4y = c \\ \text{door } A(-1, 1) \end{array} \right\} c = -3 - 4 = -7$$

Dus $l: 3x - 4y = -7$.

k snijden met l geeft het punt P .

$$\begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ 3x - 4y = -7 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 16x + 12y = 48 \\ 9x - 12y = -21 \end{cases} +$$

$$25x = 27$$

$$x = \frac{27}{25}$$

$$x = \frac{27}{25} \text{ en } 4x + 3y = 12 \text{ geeft } 4 \cdot \frac{27}{25} + 3y = 12$$

$$3y = \frac{192}{25}$$

$$y = \frac{64}{25}$$

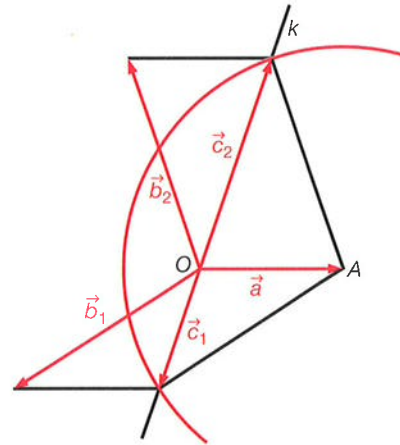
Dus $P(1\frac{2}{25}, 2\frac{14}{25})$.

- f** Cirkel met middelpunt A en straal 5.

Dit geeft de vectoren $\vec{c}_1$ en $\vec{c}_2$ op k .

Met de parallellogramconstructie vind je $\vec{b}_1$ en $\vec{b}_2$.

Zie de figuur hiernaast.



Bladzijde 192

55

- a** $a\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$ geeft $a^2x = \frac{1}{4}x^2$

$$x = 0 \vee \frac{1}{4}x = a^2$$

$$x = 0 \vee x = 4a^2$$

Dus $S(4a^2, 2a^2)$.

$$\vec{SO} = \begin{pmatrix} -4a^2 \\ -2a^2 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{SP} = \vec{SO}_L = \begin{pmatrix} 2a^2 \\ -4a^2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{OP} = \vec{OS} + \vec{SP} = \begin{pmatrix} 4a^2 \\ 2a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a^2 \\ -4a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a^2 \\ -2a^2 \end{pmatrix}, \text{ dus } P(6a^2, -2a^2).$$

- b** Stel $y_p = p$, dan is $x_p = 3p - 3$ en $\vec{OP} = \begin{pmatrix} 3p-3 \\ p \end{pmatrix}$.

$$\vec{PQ} = \vec{OP}_R = \begin{pmatrix} p \\ -3p+3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 3p-3 \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ -3p+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4p-3 \\ -2p+3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 4p-3 \\ y = -2p+3 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} x = 4p-3 \\ 2y = -4p+6 \end{cases} +$$

$$x + 2y = 3$$

Dus $l: x + 2y = 3$.

- c** $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t - 3$ geeft $x'(t) = t + 2$

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3 \text{ geeft } y'(t) = t - 2$$

$$v(t) = \sqrt{(t+2)^2 + (t-2)^2} = \sqrt{t^2 + 4t + 4 + t^2 - 4t + 4} = \sqrt{2t^2 + 8}$$

De minimale snelheid is $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ voor $t = 0$.

- d** $x(t) = 0$ geeft $t^2 - 4 = 0$, dus $t = 2 \vee t = -2$.

$t = -2$ geeft het punt $A(0, 16)$.

$$x(t) = t^2 - 4 \text{ geeft } x'(t) = 2t, \text{ dus } x'(-2) = -4.$$

$$y(t) = (t-2)^2 \text{ geeft } y'(t) = 2(t-2), \text{ dus } y'(-2) = -8.$$

$$\text{De gevraagde snelheid is } v(-2) = \sqrt{(x'(-2))^2 + (y'(-2))^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

$$e \quad P(1+3t, 5+t), \text{ dus } \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1+3t \\ 5+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t-5 \\ t+5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} AP \perp l, \text{ dus } \begin{pmatrix} 3t-5 \\ t+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ 3(3t-5) + t + 5 &= 0 \\ 9t - 15 + t + 5 &= 0 \\ 10t &= 10 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

$$t = 1 \text{ geeft } P(4, 6) \text{ en } \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle ABP) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \frac{6-2}{\sqrt{65}} = \frac{4}{\sqrt{65}}, \text{ dus } \angle ABP \approx 60,3^\circ.$$

Bladzijde 196

$$\begin{aligned} 56 \quad a \quad y = ax \text{ substitueren in } (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ geeft } (x-1)^2 + (ax)^2 &= 1 \\ x^2 - 2x + 1 + a^2x^2 &= 1 \\ (a^2 + 1)x^2 &= 2x \\ x = 0 \vee (a^2 + 1)x &= 2 \\ x = 0 \vee x &= \frac{2}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } S\left(\frac{2}{a^2+1}, \frac{2a}{a^2+1}\right) \text{ en } \overrightarrow{SO} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{a^2+1} \\ \frac{2a}{a^2+1} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SO} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2+1} \\ \frac{2a}{a^2+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{a^2+1} \\ \frac{2a}{a^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a+2}{a^2+1} \\ \frac{2a-2}{a^2+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Dus } x_P = \frac{2a+2}{a^2+1} \text{ en } y_P = \frac{2a-2}{a^2+1}.$$

b De cirkel gaat door $O(0, 0)$ en heeft dus een vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + mx + ny = 0$.

$a = 1$ geeft $P(2, 0)$ en dit geeft $4 + 0 + 2m + 0 = 0$, dus $m = -2$.

$a = -1$ geeft $P(0, -2)$ en dit geeft $0 + 4 + 0 - 2n + 0 = 0$, dus $n = 2$.

Dus $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

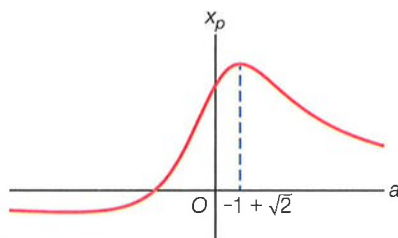
$$c \quad x_P = \frac{2a+2}{a^2+1} \text{ geeft } x_P' = \frac{(a^2+1) \cdot 2 - (2a+2) \cdot 2a}{(a^2+1)^2} = \frac{2a^2+2-4a^2-4a}{(a^2+1)^2} = \frac{-2a^2-4a+2}{(a^2+1)^2}$$

$$x_P' = 0 \text{ geeft } -2a^2 - 4a + 2 = 0$$

$$a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 8$$

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \vee a = -1 - \sqrt{2}$$



Dus x_P is maximaal voor $a = -1 + \sqrt{2}$.

57 $P(p, 2^p + 2^{-2p})$

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p \\ 2^p + 2^{-2p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ 2^p + 2^{-2p} - 2\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4\frac{1}{16} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{13}{16} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}, \text{ dus } \begin{pmatrix} p-1 \\ 2^p + 2^{-2p} - 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{13}{16} \end{pmatrix} = 0$$

$$p-1 + 1\frac{13}{16}(2^p + 2^{-2p} - 2\frac{1}{4}) = 0$$

Voer in $y_1 = x - 1 + 1\frac{13}{16}(2^x + 2^{-2x} - 2\frac{1}{4})$ en gebruik de optie nulpunt.

Je krijgt $x = -0,674\dots$, dus de x -coördinaat van P is ongeveer $-0,67$.

Bladzijde 197**58** a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, dus een normaalvector van de middelloodlijn van AB is $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Het midden van AB is $(3, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y = c \\ \text{door } (3, 1) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 3 - 1 = 8$$

$$3x - y = 8 \text{ snijden met } k \text{ geeft } 3(2 + 4t) - (1 + 5t) = 8$$

$$6 + 12t - 1 - 5t = 8$$

$$7t = 3$$

$$t = \frac{3}{7}$$

$$t = \frac{3}{7} \text{ geeft } P(2 + \frac{3}{7} \cdot 4, 1 + \frac{3}{7} \cdot 5) = P(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7})$$

b $P(2 + 4t, 1 + 5t)$

$$d(P, y\text{-as}) = 2 + 4t$$

$$rc_m = \frac{0-2}{6-0} = -\frac{1}{3} \text{ en } m \text{ door } A(0, 2), \text{ dus } m: y = -\frac{1}{3}x + 2 \text{ oftewel } m: x + 3y = 6.$$

$$d(P, m) = \frac{|2 + 4t + 3(1 + 5t) - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|19t - 1|}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Voer in } y_1 = 2 + 4x \text{ en } y_2 = \frac{|19x - 1|}{\sqrt{10}}.$$

De optie snijpunt geeft $x = -0,168\dots$ en $x = 1,153\dots$

Invullen in $2 + 4t$ geeft $1,327\dots$ en $6,613\dots$

Dus de stralen zijn $1,33$ en $6,61$.

59 $P(p, -\frac{1}{2}p + 3)$ geeft $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p \\ -\frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - 3 \\ p \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP_L} = \begin{pmatrix} p \\ -\frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - 3 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p - 3 \\ \frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}p - 3 \\ y = \frac{1}{2}p + 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \right\} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}p - 3 \\ 3y = \frac{1}{2}p + 9 \end{array} \right.$$

$$x - 3y = -12$$

$$-3y = -x - 12$$

$$y = \frac{1}{3}x + 4$$

$$\text{Dus } m: y = \frac{1}{3}x + 4.$$

60 c: $(x - 14)^2 + (y - 8)^2 = 100$

$$c \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } (x - 14)^2 + (-8)^2 = 100$$

$$(x - 14)^2 = 36$$

$$x - 14 = 6 \vee x - 14 = -6$$

$$x = 20 \vee x = 8$$

Dus $A(8, 0)$ en $B(20, 0)$.

$$\vec{z} = \frac{1}{3+1+2} \cdot \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 24 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 72 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Dus $Z(12, \frac{2}{3})$.

Bladzijde 198

- 61 a** $x(t) = 3t^2 + t + 1$ geeft $x'(t) = 6t + 1$
 $y(t) = 3t^2 - t + 1$ geeft $y'(t) = 6t - 1$
 $v(t) = \sqrt{(6t+1)^2 + (6t-1)^2} = \sqrt{36t^2 + 12t + 1 + 36t^2 - 12t + 1} = \sqrt{72t^2 + 2}$
 De minimale snelheid is $\sqrt{2}$ voor $t = 0$.
- b** De vergelijking $y(t) = 0$ heeft één oplossing,
 dus de discriminant van $at^2 - t + 1 = 0$ is gelijk aan nul.
 $D = 1 - 4a$
 $D = 0$ geeft $1 - 4a = 0$, dus $a = \frac{1}{4}$.
- 62 a** $x(t) = 0$ geeft $1 - t^2 = 0$, dus $t = 1 \vee t = -1$.
 $t = -1$ geeft $O(0, 0)$ en $t = 1$ geeft $A(0, 4)$.
 $x'(t) = -2t$ en $y'(t) = 2(1 + t)$
 $x'(1) = -2$ en $y'(1) = 4$
 De gevraagde snelheid is $v(1) = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
- b** $x + y = 1 - t^2 + (1 + t)^2 = 1 - t^2 + 1 + 2t + t^2 = 2 + 2t = 2(1 + t)$
 $(x + y)^2 = (2(1 + t))^2 = 4(1 + t)^2$
 $y = (1 + t)^2$ } $(x + y)^2 = 4y$

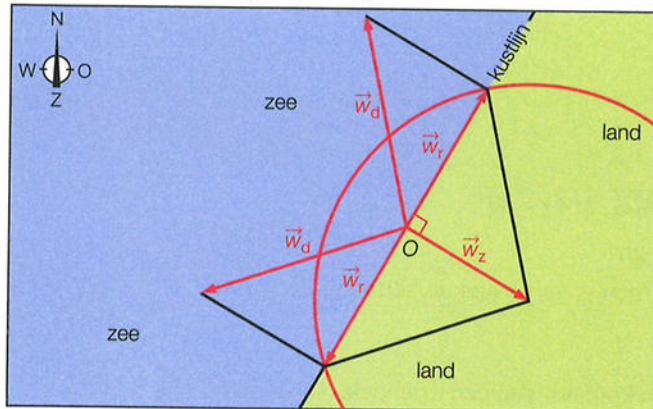
Bladzijde 199

- 63 a** $\angle CBP = 90^\circ$, dus B op de cirkel met middellijn CP .
 Dus middelpunt $M(\frac{1}{2}(-4 + 2), \frac{1}{2}(-4 + 3)) = M(-1, -\frac{1}{2})$ en
 $MP^2 = (2 - (-1))^2 + (3 - (-\frac{1}{2}))^2 = 9 + 12\frac{1}{4} = 21\frac{1}{4}$.
 Dit geeft van de cirkel de vergelijking $(x + 1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$.
- b** $D(4, -8)$ en $P(2, 3)$ geeft $\overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$
 $DP: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$
 $Q(4 - 2t, -8 + 11t)$ en $C(-4, -4)$ geeft $\overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} 4 - 2t \\ -8 + 11t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 2t \\ -4 + 11t \end{pmatrix}$
 $CQ \perp DP$ geeft $\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 - 2t \\ -4 + 11t \end{pmatrix} = 0$
 $-2(8 - 2t) + 11(-4 + 11t) = 0$
 $-16 + 4t - 44 + 121t = 0$
 $125t = 60$
 $t = \frac{12}{25}$
 $t = \frac{12}{25}$ geeft $Q(4 - \frac{24}{25}, -8 + \frac{132}{25})$ oftewel $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$.
- c** Noem de bij zijde CD horende hoogte h .
 $O(ABCD) = CD \cdot DA$
 $O(\triangle CDQ) = \frac{1}{2} CD \cdot h$ } $h = \frac{2}{3} \cdot DA$
 $O(\triangle CDQ) = \frac{1}{3} O(ABCD)$
 Dus $DQ = \frac{2}{3} \cdot DP$.
 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{OD} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$
 Dus $Q(2\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.
- 64 c:** $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 25$ } $(t - 1)^2 + (2t - 7)^2 = 25$
 $x = t$ en $y = 2t$ } $t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 28t + 49 = 25$
 $5t^2 - 30t + 25 = 0$
 $t^2 - 6t + 5 = 0$
 $(t - 1)(t - 5) = 0$
 $t = 1 \vee t = 5$

De snijpunten zijn $(1, 2)$ en $(5, 10)$.

Bladzijde 200

- 65** ■ Teken de cirkel met middelpunt het eindpunt van $\vec{w}_z$ en straal 6.
De snijpunten van de cirkel en de kustlijn zijn de eindpunten van de vectoren $\vec{w}_r$.
Teken parallellogrammen met zijde $\vec{w}_z$ waarvan de vectoren $\vec{w}_r$ diagonalen zijn.
Teken de vectoren $\vec{w}_d$, zie de figuur.



Bladzijde 201

-

$\angle AOC = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$, dus $\angle OAB = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

De cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft $OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2 \cdot OA \cdot AB \cdot \cos(\angle OAB)$

$$OB^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos(75^\circ)$$

$$OB^2 = 26,23\dots$$

$$OB = 5,12\dots$$

Dus de gevraagde snelheid is 5,1 m/s.

Bladzijde 202

- 66** ■ Het midden van CS is $(\frac{1}{2}(0+2), \frac{1}{2}(4+2)) = (1, 3)$.
 $c: (x-3)^2 + (y-2)^2 = r^2$ door $A(4, 0)$ geeft
 $r^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5$, dus $c: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$
 $AC: y = -x + 4$ snijden met c geeft $(x-3)^2 + (-x+2)^2 = 5$
 $x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 = 5$
 $2x^2 - 10x + 8 = 0$
 $x^2 - 5x + 4 = 0$
 $(x-1)(x-4) = 0$
 $x = 1 \vee x = 4$

$x_F = 1$ geeft $y_F = -1 + 4 = 3$, dus $F(1, 3)$.

Dus F is het midden van CS .

$$\mathbf{b} \quad \overrightarrow{MF} = \vec{f} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MB} = \vec{b} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0, \text{ dus } \angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) = 90^\circ.$$

$$\overrightarrow{MG} = \vec{g} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MA} = \vec{a} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0, \text{ dus } \angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90^\circ.$$

$$\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) + \angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Dus de oppervlakte van de twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel.

- 67 a** Als P op k ligt, vormen A , B en P niet de hoekpunten van een driehoek.

$$k: \frac{x}{40} + \frac{y}{10} = 1 \text{ oftewel } x + 4y = 40$$

$$k \text{ snijden met } m \text{ geeft } 18 + 5t + 4(30 - 3t) = 40$$

$$18 + 5t + 120 - 12t = 40$$

$$-7t = -98$$

$$t = 14$$

Dus $P(88, -12)$.

$$\mathbf{b} \quad \overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 18 + 5t \\ 30 - 3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 + 5t \\ 20 - 3t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BP} = \vec{p} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 18 + 5t \\ 30 - 3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 + 5t \\ 30 - 3t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP} \text{ geeft } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 18 + 5t \\ 20 - 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -22 + 5t \\ 30 - 3t \end{pmatrix} = 0$$

$$(18 + 5t)(-22 + 5t) + (20 - 3t)(30 - 3t) = 0$$

$$-396 + 90t - 110t + 25t^2 + 600 - 60t - 90t + 9t^2 = 0$$

$$34t^2 - 170t + 204 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t - 2)(t - 3) = 0$$

$$t = 2 \vee t = 3$$

$$t = 2 \text{ geeft } P(28, 24) \text{ en } AP = \sqrt{980} \text{ en } BP = \sqrt{720}, \text{ dus } AP \neq BP.$$

$$t = 3 \text{ geeft } P(33, 21) \text{ en } AP = \sqrt{1210} \text{ en } BP = \sqrt{490}, \text{ dus } AP \neq BP.$$

Dus driehoek ABP is niet gelijkbenig, dus zo'n positie is er niet.

16.7 Goniometrie

Bladzijde 203

68 a $\cos^2(x) + 1\frac{1}{4} = \sqrt{3} \cdot \sin(x)$

$$1 - \sin^2(x) + 1\frac{1}{4} = \sqrt{3} \cdot \sin(x)$$

$$\sin^2(x) + \sqrt{3} \cdot \sin(x) - 2\frac{1}{4} = 0$$

$$\text{Stel } \sin(x) = u.$$

$$u^2 + \sqrt{3} \cdot u - 2\frac{1}{4} = 0$$

$$D = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot -2\frac{1}{4} = 12$$

$$u = \frac{-\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee u = \frac{-\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} = -1\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi$$

- b** De omtrek, dus ook de straal, van c is drie keer zo groot als de straal van de eenheidscirkel.

Dus $r = 3$, $M(4, 0)$ en $a = 4$.

De amplitude is 3, dus $b = 3$.

De omlooptijd is 30 seconden, dus $c = \frac{2\pi}{30} = \frac{1}{15}\pi$.

Q gaat stijgend door de evenwichtsstand op $t = \frac{30}{4} = 7\frac{1}{2}$, dus $d = 7\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{c } N &= \frac{\sin(t + \frac{1}{4}\pi) + \sin(t - \frac{1}{4}\pi)}{\cos(t + \frac{1}{6}\pi) + \cos(t - \frac{1}{6}\pi)} \\ &= \frac{\sin(t)\cos(\frac{1}{4}\pi) + \cos(t)\sin(\frac{1}{4}\pi) + \sin(t)\cos(\frac{1}{4}\pi) - \cos(t)\sin(\frac{1}{4}\pi)}{\cos(t)\cos(\frac{1}{6}\pi) - \sin(t)\sin(\frac{1}{6}\pi) + \cos(t)\cos(\frac{1}{6}\pi) + \sin(t)\sin(\frac{1}{6}\pi)} \\ &= \frac{2\sin(t)\cos(\frac{1}{4}\pi)}{2\cos(t)\cos(\frac{1}{6}\pi)} = \frac{2\sin(t) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2\cos(t) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \tan(t) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot \tan(t) \end{aligned}$$

Dus $a = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

$$\text{d } s = 1\frac{1}{4} - \cos(\frac{1}{2}t) - \frac{1}{4}\cos^2(t) \text{ geeft}$$

$$s' = v = \sin(\frac{1}{2}t) \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(t) \cdot -\sin(t) = \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}t) + \frac{1}{2}\cos(t)\sin(t)$$

Voer in $y_1 = \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{2}\cos(x)\sin(x)$.

De optie maximum geeft $x = 3,8409\dots$ en $y = 0,7160\dots$

Dus de maximale snelheid is ongeveer 0,716 m/s.

$$\begin{aligned} \text{e } f(x) &= 2 + \sin(x) - \cos^2(x) \text{ geeft} \\ f'(x) &= \cos(x) - 2\cos(x) \cdot -\sin(x) = \cos(x) + 2\cos(x)\sin(x) \\ f'(x) &= 0 \text{ geeft } \cos(x)(1 + 2\sin(x)) = 0 \\ \cos(x) &= 0 \vee \sin(x) = -\frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \end{aligned}$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$

De toppen zijn $(\frac{1}{2}\pi, 3)$, $(1\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(1\frac{1}{6}\pi, \frac{3}{4})$ en $(1\frac{5}{6}\pi, \frac{3}{4})$.

$$\begin{aligned} \text{f } 1 - \sin^2(x) &= 0 \text{ geeft } \sin^2(x) = 1 \\ \sin(x) &= 1 \vee \sin(x) = -1 \\ x &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\ x &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \\ \cos(x) \cdot (\cos(2x) + 1) &= 0 \text{ geeft } \cos(x) = 0 \vee \cos(2x) = -1 \\ x &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee 2x = \pi + k \cdot 2\pi \\ x &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \end{aligned}$$

Dus voor $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ krijg je $\frac{0}{0}$.

$$f(x) = \frac{1 - \sin^2(x)}{\cos(x) \cdot (\cos(2x) + 1)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos(x) \cdot (2\cos^2(x) - 1 + 1)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos(x) \cdot 2\cos^2(x)} = \frac{1}{2\cos(x)}$$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{1}{2\cos(x)}$ bestaat niet, dus de grafiek van f heeft geen perforatie.

$$\text{g } f(x) = \frac{\cos^2(x) - 1}{\sin(2x)} = \frac{-\sin^2(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \frac{-\sin(x)}{2\cos(x)} \wedge \sin(x) \neq 0$$

$\sin(x) \neq 0$ en x tussen $\frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$ geeft $x \neq \pi$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin(x)}{2\cos(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

Dus de perforatie is $A(\pi, 0)$ en $g(x) = \frac{-\sin(x)}{2\cos(x)}$.

$$g'(x) = \frac{2\cos(x) \cdot -\cos(x) + \sin(x) \cdot -2\sin(x)}{4\cos^2(x)} = \frac{-2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)}{4\cos^2(x)} = \frac{-2}{4\cos^2(x)} = \frac{-1}{2\cos^2(x)}$$

$$g'(\pi) = \frac{-1}{2 \cdot (-1)^2} = -\frac{1}{2}, \text{ dus } r_{c_k} = 2.$$

$$\left. \begin{aligned} k: y &= 2x + b \\ \text{door } A(\pi, 0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2\pi + b &= 0 \\ b &= -2\pi \end{aligned}$$

Dus $k: y = 2x - 2\pi$.

h $f_p(x) = \frac{1}{2}p$ geeft $\cos(x) = \frac{1}{2}$, dus $x = \frac{1}{3}\pi$.

$$O(V) = \int_0^{\frac{1}{3}\pi} (p \cos(x) - \frac{1}{2}p) dx = \left[p \sin(x) - \frac{1}{2}px \right]_0^{\frac{1}{3}\pi} = p \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \frac{1}{6}\pi p - 0$$

$$O(V) = 2 \text{ geeft } p(\sin(\frac{1}{3}\pi) - \frac{1}{6}\pi) = 2$$

$$p(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi) = 2$$

$$p = \frac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi} \approx 5,84$$

Bladzijde 204

69 a $A(2 \cos(t), 2 \sin(t))$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \overrightarrow{BA_R} \\ \overrightarrow{BA} &= \begin{pmatrix} 2 \cos(t) - 4 \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix}, \text{ dus } \overrightarrow{BA_R} = \begin{pmatrix} 2 \sin(t) \\ 4 - 2 \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \left\} \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \sin(t) \\ 4 - 2 \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2 \sin(t) \\ 4 - 2 \cos(t) \end{pmatrix}$$

b Los op $|\sin(2t)| = |\sin(t)|$

$$\sin(2t) = \sin(t) \vee \sin(2t) = -\sin(t)$$

$$\sin(2t) = \sin(t) \vee \sin(2t) = \sin(-t)$$

$$2t = t + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi - t + k \cdot 2\pi \vee 2t = -t + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi + t + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = k \cdot 2\pi \vee t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee t = k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } t = 0 \vee t = \pi \vee t = 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \frac{2}{3}\pi \vee t = \frac{4}{3}\pi \vee t = \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{Het vierde tijdstip is } t = \frac{2}{3}\pi.$$

c $y(t) = 0$ geeft $\sin(t) + \cos(2t) = 0$

$$\sin(t) = -\cos(2t)$$

$$\cos(t - \frac{1}{2}\pi) = \cos(2t + \pi)$$

$$t - \frac{1}{2}\pi = 2t + \pi + k \cdot 2\pi \vee t - \frac{1}{2}\pi = -2t - \pi + k \cdot 2\pi$$

$$-t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$t \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } t = \frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{1}{6}\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi$$

$$t_A = \frac{1}{6}\pi \text{ en } t_B = \frac{5}{6}\pi, \text{ dus het duurt } \frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi \text{ seconden.}$$

d $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -3 \sin(t) \\ \cos(t) - 2 \sin(2t) \end{pmatrix}$

$$t_A = \frac{1}{6}\pi, \text{ zie vraag c.}$$

$$\vec{v}(\frac{1}{6}\pi) = \begin{pmatrix} -3 \sin(\frac{1}{6}\pi) \\ \cos(\frac{1}{6}\pi) - 2 \sin(\frac{1}{3}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{De snelheid in A is } v(\frac{1}{6}\pi) = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3} = 3 \text{ m/s.}$$

e $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin(2t - \pi) \\ 2 \sin(t) \cos(t) + 4 \cos(4t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin(2t) \\ \sin(2t) + 4 \cos(4t) \end{pmatrix}$

$$\vec{v}(\frac{1}{4}\pi) = \begin{pmatrix} 2 \sin(\frac{1}{2}\pi) \\ \sin(\frac{1}{2}\pi) + 4 \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 1 + 4 \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(\frac{3}{4}\pi) = \begin{pmatrix} 2 \sin(\frac{3}{2}\pi) \\ \sin(\frac{3}{2}\pi) + 4 \cos(3\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -1 \\ -1 + 4 \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(\vec{v}(\frac{1}{4}\pi), \vec{v}(\frac{3}{4}\pi))) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}} = \frac{-4 + 15}{\sqrt{377}} = \frac{11}{\sqrt{377}}$$

$$\text{De gevraagde hoek is } \varphi \approx 55,5^\circ.$$

Bladzijde 209

70 $z = 1 - \cos(t) + \frac{1}{8}\sin^2(t)$ geeft $\frac{dz}{dt} = \sin(t) + \frac{1}{4}\sin(t)\cos(t)$

$$\text{Voer in } y_1 = \sin(x) + \frac{1}{4}\sin(x)\cos(x).$$

$$\text{De optie maximum geeft } x = 1,344... \text{ en } y = 1,029...$$

$$\text{Dus de maximale snelheid is } 1,03.$$

71 $x(t) = 0$ geeft $\sin(2t) + \sin(t) = 0$

$$\sin(2t) = -\sin(t)$$

$$\sin(2t) = \sin(-t)$$

$$2t = -t + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi - t + k \cdot 2\pi$$

$$3t = k \cdot 2\pi \vee t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$0 < t < \pi$ geeft $t = \frac{2}{3}\pi$

$x'(t) = \cos(2t) \cdot 2 + \cos(t)$ en $y'(t) = -\sin(t)$ geeft $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) + \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$

$$\vec{v}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \\ -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Dus de snelheid in B is $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$.

72 Er is een perforatie als $1 + \cos(2x) = 0 \wedge \cos(x) = 0$

$$\cos(2x) = -1 \wedge x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = \pi + k \cdot 2\pi \wedge x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \wedge x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1 + 2\cos^2(x) - 1}{\cos(x)} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \left(\frac{2\cos^2(x)}{\cos(x)} + 1 \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} (2\cos(x) + 1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}\pi} (2\cos(x) + 1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

Dus de perforaties zijn $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(1\frac{1}{2}\pi, 1)$.

73 a $f(x) = 6\sin(x) - \cos(2x)$ geeft $f'(x) = 6\cos(x) + 2\sin(2x)$

$f'(x) = 0$ geeft $6\cos(x) + 4\sin(x)\cos(x) = 0$

$$2\cos(x)(3 + 2\sin(x)) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \vee \sin(x) = -1\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ geen opl.}$$

b $f(1\frac{1}{2}\pi - 1) = -3,6579...$

De gevraagde afstand is $5 - 3,6579... \approx 1,34$.

Bladzijde 210

74 a Voer in $y_1 = 125 \cos\left(\frac{2\pi}{745}x\right)$ en $y_2 = 40$.

De optie snijpunt geeft $x = 147,62...$ en $x = 596,37...$

De droogligtijd is $596,37... - 147,62... \approx 450$ minuten.

b De grafiek van h is symmetrisch in de lijn $t = \frac{745}{2}$.

Dus $\begin{cases} t_2 + t_1 = 745 \\ t_2 - t_1 = D \end{cases}$

$$2t_1 = 745 - D$$

$$t_1 = \frac{745}{2} - \frac{1}{2}D$$

$$z = h(t_1) = 125 \cos\left(\frac{2\pi}{745}\left(\frac{745}{2} - \frac{1}{2}D\right)\right) = 125 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right)$$

Bladzijde 211

$$c \quad z = 125 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{745} D\right) \text{ geeft } \frac{dz}{dD} = -125 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{745} D\right) \cdot -\frac{\pi}{745} = \frac{125\pi}{745} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{745} D\right)$$

$$\left[\frac{dz}{dD}\right]_{D=372,5} = \frac{125\pi}{745} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{745} \cdot 372,5\right) = \frac{125\pi}{745} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{125\pi}{745}$$

Dus de helling bij figuur 16.137 is $\frac{745}{125\pi} \approx 1,9$

$$D = 8 \cdot 10^{-5} z^3 + 1,7z + 372,5 \text{ geeft } \frac{dD}{dz} = 2,4 \cdot 10^{-4} z^2 + 1,7$$

$$\left[\frac{dD}{dz}\right]_{z=0} = 1,7$$

Dus de helling bij figuur 16.138 is 1,7.

$$75 \quad g(x) = 0 \text{ geeft } 3 - \sqrt{2x} = 0$$

$$\sqrt{2x} = 3$$

$$2x = 9$$

$$x = 4\frac{1}{2}, \text{ dus } x_A = 4\frac{1}{2}$$

$$f(x) = 3 \cos(2x) - \sqrt{2x} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = -3 \sin(2x) \cdot 2 - \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = -6 \sin(2x) - \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

Los op $f'(x) = 0$.

$$\text{Voer in } y_1 = -6 \sin(2x) - \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

De optie nulpunt geeft $x = 1,617\dots$, $x = 3,108\dots$ en $x = 4,739\dots$

Dus $x_B = 4,739\dots$ en dit is groter dan $x_A = 4,5$, dus B ligt rechts van A .

Bladzijde 212

$$76 \quad a \quad x(t) = \cos(t) + \sin(2t) \text{ geeft } x'(t) = -\sin(t) + 2 \cos(2t)$$

$$y(t) = 2 \cos(t) \text{ geeft } y'(t) = -2 \sin(t)$$

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(-\sin(t) + 2 \cos(2t))^2 + (-2 \sin(t))^2}$$

$$\text{Voer in } y_1 = \sqrt{(-\sin(x) + 2 \cos(2x))^2 + (-2 \sin(x))^2}.$$

De optie maximum geeft $x = 1,57\dots$ en $y = 3,60\dots$

De maximale snelheid is 3,6 m/s.

$$b \quad y(t) = x(t) \text{ geeft } 2 \cos(t) = \cos(t) + \sin(2t)$$

$$\cos(t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$\cos(t) = 0 \vee 2 \sin(t) = 1$$

$$\cos(t) = 0 \text{ geeft } 0$$

$$\sin(t) = \frac{1}{2} \text{ geeft } t_A = \frac{1}{6}\pi \text{ en } t_B = \frac{5}{6}\pi$$

De beweging van A naar B duurt $\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$ seconden.

$$c \quad \text{helling} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos(t + \pi) - 2 \cos(t)}{\cos(t + \pi) + \sin(2(t + \pi)) - (\cos(t) + \sin(2t))}$$

$$= \frac{-2 \cos(t) - 2 \cos(t)}{-\cos(t) + \sin(2t) - \cos(t) - \sin(2t)} = \frac{-4 \cos(t)}{-2 \cos(t)}$$

Dit is voor elke t met $\cos(t) \neq 0$ gelijk aan 2 en dus onafhankelijk van t .

Bladzijde 213

$$77 \quad \text{De omtrek van } c_1 \text{ is } 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi, \text{ dus de omtrek van } c_2 \text{ is } 4\pi \text{ en dus is de straal van } c_2 \text{ gelijk aan } 2.$$

Dus $l = 2$.

Het middelpunt van c_2 is $(0, 1\frac{1}{2})$ en de evenwichtsstand van y_Q is $1\frac{1}{2}$, dus $k = 1\frac{1}{2}$.

Een rondgang van Q duurt 12 seconden, dus $m = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.

Het punt Q gaat een kwart periode na $t = 0$ omhoog door de evenwichtsstand, dus $n = 3$.

$$78 \quad a \quad \text{Er moet bewezen worden dat } \cos(\pi - a) \sin(2(\pi - a)) = \cos(a) \sin(2a).$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$$

$$\sin(2(\pi - a)) = \sin(2\pi - 2a) = -\sin(2a)$$

$$\text{Dus } \cos(\pi - a) \sin(2(\pi - a)) = -\cos(a) \cdot -\sin(2a) = \cos(a) \sin(2a).$$

Dus beide punten bevinden zich recht boven elkaar en dus is de lijn door de punten verticaal.

- b** Er moet gelden $|y(t)| = 2 \cdot |x(t)|$.

$$|\cos(t)| = 2 \cdot |\cos(t) \sin(2t)|$$

$$\cos(t) = 0 \vee 2 \cdot |\sin(2t)| = 1$$

$\cos(t) = 0$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi \vee t = 1\frac{1}{2}\pi$ en deze laten we buiten beschouwing.

$$|\sin(2t)| = \frac{1}{2}$$

$$2t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee 2t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$0 \leq t \leq 2\pi \text{ geeft } t = \frac{1}{12}\pi \vee t = \frac{7}{12}\pi \vee t = 1\frac{1}{12}\pi \vee t = 1\frac{7}{12}\pi \vee t = \frac{5}{12}\pi \vee t = \frac{11}{12}\pi \vee t = 1\frac{5}{12}\pi \vee t = 1\frac{11}{12}\pi$$

Het vierde tijdstip is $t = \frac{11}{12}\pi$.

c $\overrightarrow{OP}_t = \begin{pmatrix} \cos(t) \sin(2t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{OP}_{\frac{3}{4}\pi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$x'(t) = -\sin(t) \cdot \sin(2t) + \cos(t) \cdot 2 \cos(2t)$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \cos(2t) - \sin(t) \sin(2t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \begin{pmatrix} 2 \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \\ -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dus voor $t = \frac{3}{4}\pi$ geldt $\overrightarrow{OP}_t = \vec{v}$.

Bladzijde 214

79 a $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)}$

Delen van teller en noemer door $\cos(\alpha) \cos(\beta)$ geeft

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{1 + \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}} = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$$

b $\tan(\varphi) = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} = \frac{\frac{75}{x} - \frac{27}{x}}{1 + \frac{75}{x} \cdot \frac{27}{x}} = \frac{75x - 27x}{x^2 + 75 \cdot 27} = \frac{48x}{x^2 + 2025}$

c $g(x) = \frac{48x}{x^2 + 2025}$ geeft

$$g'(x) = \frac{(x^2 + 2025) \cdot 48 - 48x \cdot 2x}{(x^2 + 2025)^2} = \frac{48x^2 + 97200 - 96x^2}{(x^2 + 2025)^2} = \frac{97200 - 48x^2}{(x^2 + 2025)^2}$$

$$g'(x) = 0 \text{ geeft } 97200 - 48x^2 = 0$$

$$48x^2 = 97200$$

$$x^2 = 2025$$

$$x = 45 \text{ (} x = -45 \text{ voldoet niet)}$$

De afstand is 45 meter.

Bladzijde 215

80 a $f(x) = \sqrt{2}$ geeft $\frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)} = \sqrt{2}$

$$\cos(x) = -\sin^2(x) \cdot \sqrt{2}$$

$$\cos(x) = -(1 - \cos^2(x)) \cdot \sqrt{2}$$

$$\cos(x) = \cos^2(x) \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$\cos^2(x) \cdot \sqrt{2} - \cos(x) - \sqrt{2} = 0$$

$$\text{Stel } \cos(x) = u.$$

$$u^2 \cdot \sqrt{2} - u - \sqrt{2} = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot -\sqrt{2} = 9$$

$$u = \frac{1 \pm 3}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \vee u = \frac{1 - 3}{2\sqrt{2}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(x) = \sqrt{2} \text{ vold. niet } \vee \cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

Dus $x_A = \frac{3}{4}\pi$ en $x_B = 1\frac{1}{4}\pi$.

- b** Er moet een waarde van x zijn waarvoor $\cos(x) = 0 \wedge p - \sin^2(x) = 0$.

$$\cos(x) = 0 \text{ geeft } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\text{Voor } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ is } \sin^2(x) = 1.$$

Dus de noemer wordt dan 0 als $p = 1$.

$$f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{1}{\cos(x)}$$

Deze limiet bestaat niet, dus er is geen waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft.

c $f_p(0) = \frac{1}{p-0} = \frac{1}{p}$, dus $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$

$$f_p(\pi) = \frac{-1}{p-0} = -\frac{1}{p}, \text{ dus } Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$$

$$f_p(2\pi) = \frac{1}{p-0} = \frac{1}{p}, \text{ dus } R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$$

$$rc_{PQ} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p}}{\pi - 0} = -\frac{2}{p\pi}$$

$$rc_{QR} = \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{p}}{2\pi - \pi} = \frac{2}{p\pi}$$

$$PQ \perp QR, \text{ dus } rc_{PQ} \cdot rc_{QR} = -1$$

$$-\frac{2}{p\pi} \cdot \frac{2}{p\pi} = -1$$

$$\frac{4}{p^2\pi^2} = 1$$

$$p^2\pi^2 = 4$$

$$p^2 = \frac{4}{\pi^2}$$

$$p = \frac{2}{\pi} \vee p = -\frac{2}{\pi}$$

Bladzijde 216

- 81 a** Er moet gelden $AC^2 = 2 \cdot BC^2$.

$$AC^2 = (\cos(t) - 1)^2 + \sin^2(t)$$

$$BC^2 = \cos^2(t) + (\sin(t) - 1)^2$$

$$\text{Voer in } y_1 = (\cos(x) - 1)^2 + \sin^2(x) \text{ en } y_2 = 2(\cos^2(x) + (\sin(x) - 1)^2).$$

De optie snijpunt geeft $x = 0,927\dots$ en $y = 0,8$, dus $t \approx 0,93$.

- b** $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB_R}$

$$\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ 1 - \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB_R} = \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$$

- 82 a** $y(t) = 0$ geeft $\sin(2t) = \sin(t)$

$$2t = t + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi - t + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$0 \leq t \leq 2\pi \text{ geeft } t = 0 \vee t = 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \pi \vee t = \frac{2}{3}\pi$$

$$x(0) = x(2\pi) = 1 - 0 = 1$$

$$x\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x(\pi) = 1 - 0 = 1$$

$$x\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Dus } x_p = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Bladzijde 217

b $x(t) = \cos(2t) - \sin(2t)$ geeft $x'(t) = -2\sin(2t) - 2\cos(2t)$
 $y(t) = \sin(2t) - \sin(t)$ geeft $y'(t) = 2\cos(2t) - \cos(t)$
 $x'(0) = -2, y'(0) = 1, x'(\pi) = -2, y'(\pi) = 3$

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{4+3}{\sqrt{65}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

 $\varphi \approx 29,7^\circ$

83 a $A(p) = \int_p^{\pi-p} 2\sin(x) dx = [-2\cos(x)]_p^{\pi-p} = -2\cos(\pi-p) + 2\cos(p)$
 $= 2\cos(p) + 2\cos(p) = 4\cos(p)$

b $O(W) = \frac{1}{2}A(p) = 2\cos(p)$
 $O(W) = (\pi - p - p) \cdot f(p) = (\pi - 2p) \cdot 2\sin(p)$
Dus $2\cos(p) = (\pi - 2p) \cdot 2\sin(p)$.
Voer in $y_1 = 2\cos(x)$ en $y_2 = (\pi - 2x) \cdot 2\sin(x)$.
De optie snijpunt geeft $x = 0,405\dots$
Dus $p \approx 0,41$.